Soluzione della seconda prova intermedia dell'8 gennaio 2013

Esercizio 1

(a) Le tre somme hanno lo stesso valore:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = k + 2,$$

e questo fatto è esprimibile con la relazione

$$A\mathbf{e} = (2 + k)\mathbf{e},$$

dove $\mathbf{e} = [1,\ 1,\ 1]^T$. In altri termini $k + 2$ è un autovalore di A.

(b) Si calcola il polinomio caratteristico di A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + (k + 4)\lambda^2 + (-2k - 5)\lambda + k + 2.$$

Dal punto precedente si sa che $\lambda_1 = k + 2$ è un autovalore, da cui

$$p(\lambda) = (\lambda - k - 2)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1),$$

e di conseguenza $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

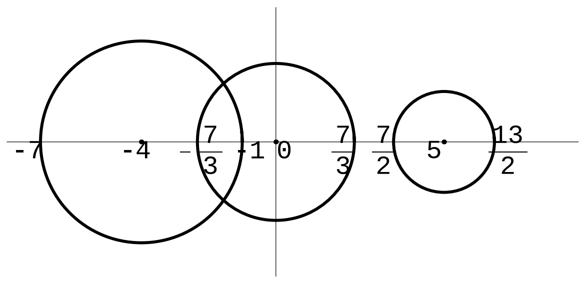
(c) L'autovalore 1 ha molteplicità geometrica $\tau(1) = 2$ per ogni k, infatti

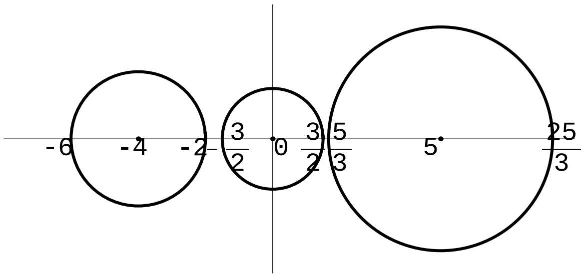
$$A - I = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

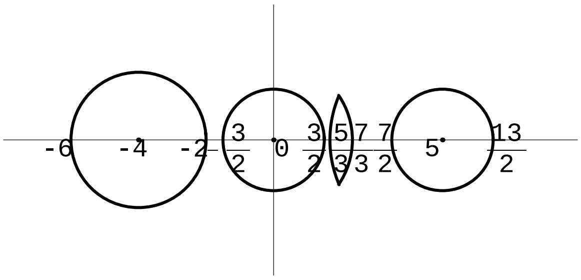
ha evidentemente rango 1, e quindi $\tau(1) = 3 - \operatorname{rank}(A - I) = 2$. Pertanto se $k + 2 \neq 1$, ovvero $k \neq -1$, la matrice ha due autovalori distinti, la somma delle cui molteplicità geometriche è 3, e quindi A è diagonalizzabile. Se invece $k = -1$, A ammette il solo autovalore 1, con molteplicità algebrica 3 e geometrica 2, e quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 2

(a) Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni.







I cerchi per colonne sono a due a due disgiunti, quindi gli autovalori sono tutti reali. Inoltre $-6 \le \lambda_1 \le -2$, $-3/2 \le \lambda_2 \le 3/2$, $5/3 \le \lambda_3 \le 25/3$. Dal fatto che il terzo cerchio per riga è disgiunto dall'unione degli altri due, per λ_3 si ha anche $7/2 \le \lambda_3 \le 13/2$. In conclusione le migliori limitazioni ottenibili sono:

$$-6 \le \lambda_1 \le -2,$$

$$-3/2 \le \lambda_2 \le 3/2,$$

$$7/2 \le \lambda_3 \le 13/2.$$

(b) Dalla localizzazione ottenuta al punto (a) si ha immediatamente $r \le 13/2$.

(c) (*facoltativo*) Si calcola A^2:

$$B = A^2 = \begin{bmatrix} 19 & -3 & 10/3 \\ -8/3 & 5/3 & 26/3 \\ 3/2 & 7/2 & 83/3 \end{bmatrix}.$$

Siano μ_i gli autovalori di A^2; è noto che $\mu_i = \lambda_i^2$, ne segue che $\mu_i \in \mathbf{R}$ e $\mu_i \ge 0$. Inoltre è $\max(\mu_i) = r^2$. Senza disegnarli, dai cerchi per riga si ha

$$\mu_i \le \max(b_{11} + |b_{12}| + |b_{13}|, b_{22} + |b_{21}| + |b_{23}|, b_{33} + |b_{31}| + |b_{32}|$$

$$= 83/3 + 5 = 98/3.$$

Dai cerchi per colonna si ha

$$\mu_i \le \max(b_{11} + |b_{21}| + |b_{31}|, b_{22} + |b_{12}| + |b_{32}|, b_{33} + |b_{13}| + |b_{23}|$$
$$= 83/3 + 12 = 119/3.$$

Quindi $r^2 \le 98/3$, da cui $r \le 7\sqrt{2/3}$, che è minore di 13/2, la limitazione trovata al punto (b).

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno (retta di regressione lineare) $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^T V | V^T \mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [7/10 \ \ -1/10]^T$, e quindi $p(x) = \frac{7}{10}x - \frac{1}{10}$.

(b) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo due $q(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^T V | V^T \mathbf{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Si possono dividere per 2 la prima e la seconda equazione. Applicando poi il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & \frac{20}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [-1/4 \;\, 19/20 \;\, 3/20]^T$, e quindi $q(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{20}x + \frac{3}{20}$.

(c) Si ottiene $p(2) = 13/10$ e $q(2) = 21/20$. $|q(2) - 1| < |p(2) - 1|$, quindi il valore $f(2) = 1$ è approssimato meglio da $q(2)$.