Soluzione della seconda prova intermedia
di Algebra lineare del 22 maggio 2009

Esercizio 1

(a) Poiché $\det G = \alpha$, G è invertibile per ogni $\alpha \neq 0$. Si ha quindi

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G}\,\mathrm{adj}(G) = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix},$$

e

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{2}(\frac{5}{\alpha} - 1) & 0 & \frac{5}{2\alpha} \\ 3 - 2\alpha - \frac{1}{\alpha} & \alpha - 1 & 3 - \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

$b_{31} = 0$ per $\alpha = 1$ o $\alpha = 1/2$, e $b_{32} = 0$ per $\alpha = 1$. Quindi il valore richiesto per α è 1.

A e B sono matrici simili, pertanto hanno gli stessi autovalori.

(b) Per $\alpha = 1$ si ha

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico, calcolato sviluppando $\det(B - \lambda I)$ secondo la terza riga è

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2),$$

e quindi gli autovettori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$.

Per gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 2$, la matrice $A - \lambda_1 I$ viene triangolarizzata nella matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui gli autovettori sono della forma $k[1\ 1\ 0]^T$, $k \in \mathbf{R}$.

Per gli autovettori relativi a $\lambda_3 = -1$, la matrice $A - \lambda_3 I$ viene triangolarizzata nella matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

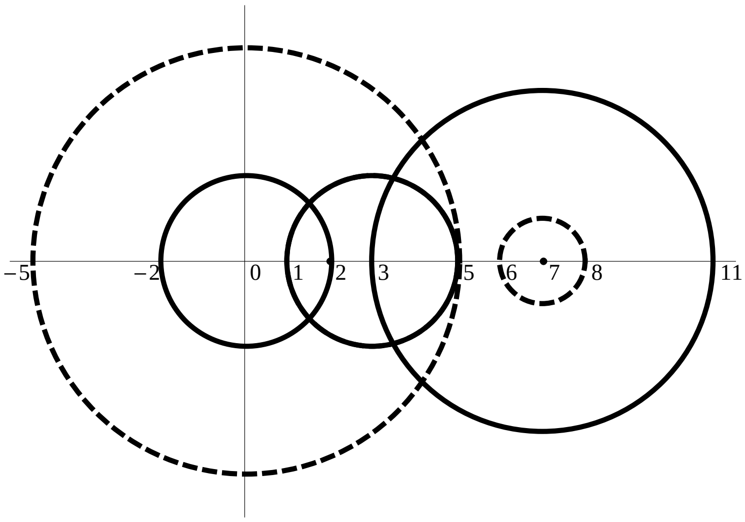
per cui gli autovettori sono della forma $k[-\frac{1}{2}\ 1\ 0]^T$, $k \in \mathbf{R}$.

La molteplicità geometrica di λ_1 è minore della sua molteplicità algebrica, quindi B non è diagonalizzabile.

(c) È noto che le molteplicità algebriche e geometriche si conservano con le trasformazioni per similitudine, quindi neanche A è diagonalizzabile.

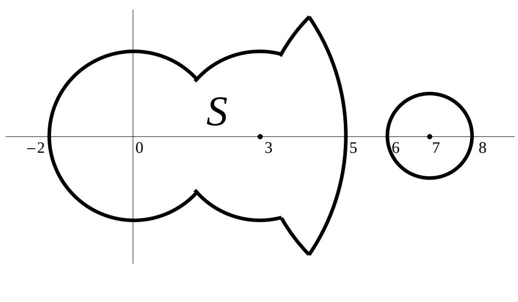
Esercizio 2

(a) I cerchi di Gerschgorin per riga (linea continua) e per colonna (linea tratteggiata) sono i seguenti:



Il cerchio di centro 7 e raggio 1, disgiunto dall'unione dei restanti cerchi per colonna, contiene un solo autovalore, necessariamente reale. Gli altri autovalori possono essere non reali.

Per una migliore localizzazione si considera l'intersezione dell'unione dei cerchi per riga con l'unione dei cerchi per colonna, raffigurata qui di seguito:



Si conclude che un autovalore reale appartiene all'intervallo $[6, 8]$, gli altri autovalori possono essere non reali e appartengono all'insieme S.

(b) 5.5 e $1 + 2\mathbf{i}$ non possono essere autovalori perché non appartengono alla regione individuata al punto (a). Il numero $7 - \frac{1}{2}\mathbf{i}$ appartiene a tale regione, piú precisamente al cerchio di centro 7 e raggio 1: ma se fosse autovalore, lo sarebbe anche il suo coniugato $7 + \frac{1}{2}\mathbf{i}$, e allora il cerchio in questione conterrebbe due autovalori, e questo non è possibile. L'unico autovalore, reale, contenuto il tale cerchio è maggiore in modulo di tutti i numeri appartenenti all'insieme S: se chiamiamo questo autovalore λ_3, si ha $6 \leq \lambda_3 \leq 8$, e $\lambda_3 = \max_i |\lambda_i| \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V|\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 8 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 26 \end{array}\right].$$

Dopo aver scambiato la seconda con la quarta riga, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 36 & -24 & 28 & 80 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [1\ 0\ -1\ 2]^T$, e quindi $p(x) = x^3 - x + 2$.

I coefficienti del polinomio di regressione lineare $q(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V^T V|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 92 \\ 4 & 4 & 38 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 92 \\ 0 & \frac{20}{7} & \frac{82}{7} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [\frac{27}{5}\ \frac{41}{10}\ ]^T$, e quindi $q(x) = \frac{27}{5}x + \frac{41}{10}$.

(b) (*facoltativo*) Affinché $q(x) = a_0 x + a_1$ sia costante, ovvero $a_0 = 0$, nel sistema lineare $V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$ il termine noto $V^T\mathbf{f}$ deve essere multiplo della seconda colonna della matrice $V^T V$. Ciò significa che il termine noto deve avere componenti uguali:

$$\sum_{i=0}^{3} x_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i),$$

da cui si ottiene questa equazione in $f(0)$:

$$92 = f(0) + 36,$$

che dà $f(0) = 56$.