Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare dell'11 gennaio 2013

Esercizio 1

(a) Posto

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e } B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si ha $\dim U = \operatorname{rank} A$, e $\dim V = \operatorname{rank} B$. Con il metodo di Gauss le matrici A e B vengono ricondotte alle seguenti forme triangolari superiori a scalini

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

rispettivamente, quindi $\dim U = 2$, e $\dim V = 2$.

(b) È noto che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ se $\mathbf{R}^4 = U + V$ e $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Si consideri la matrice C 4×4 ottenuta affiancando come colonne due vettori di una base di U e due vettori di una base di V, che possono essere scelti come le prime due colonne di A e di B, rispettivamente:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando a C il metodo di Gauss si ottengono le matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9/5 \end{bmatrix}.$$

Poiché C ha rango massimo, $U + V$ contiene 4 vettori linearmente indipendenti, e quindi coincide con $\mathbf{R}^4$. Inoltre, se $\mathbf{x} \in U \cap V$, deve essere $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 = \beta_1 \mathbf{c}_3 + \beta_2 \mathbf{c}_4$, dove con $\mathbf{c}_i$ si indica la i-esima colonna di C: ne segue $C[\alpha_1 \ \alpha_2 \ -\beta_1 \ -\beta_2]^T = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) Se si pone $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2$, $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{c}_3 + \beta_2\mathbf{c}_4$, si tratta di risolvere il sistema lineare $C[\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2]^T = \mathbf{x}$. Applicando il metodo di Gauss alla matrice aumentata $[C|\mathbf{x}]$, si ottiene la seguente matrice aumentata finale:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/5 & -6 \end{array}\right],$$

e, per sostituzione all'indietro, $\alpha_1 = -16$, $\alpha_2 = -7$, $\beta_1 = 4/3$, $\beta_2 = 10/3$. Dunque

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Con il metodo di Gauss, da A si ottengono le matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h & 3h \\ 0 & h(h+2) & 2h(2h+2) & 3h(3h+2) \\ 0 & h(h^2+3h+3) & 2h(4h^2+6h+3) & 3h(9h^2+9h+3) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h & 3h \\ 0 & 0 & 2h^2 & 6h^2 \\ 0 & 0 & 2h^2(3h+3) & 3h^2(8h+6) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h & 3h \\ 0 & 0 & 2h^2 & 6h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6h^3 \end{bmatrix},$$

da cui $\det A = 12h^6$.

Esercizio 3

(a) Si calcolano AB,

$$AB = 8\begin{bmatrix} 2(4-k) & 4(4+k) & 4-3k \\ 6 & -4 & -3 \\ 4(6-k) & 8(k-2) & 4-6k \end{bmatrix},$$

BA,

$$BA = 8\begin{bmatrix} 2(5-2)k & 20 & 3-2k \\ 6 & -4 & -3 \\ 4(7-2k) & -8 & 2(1-2k) \end{bmatrix},$$

e $AB - BA$,

$$AB - BA = 8(k-1)\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quindi il solo valore per cui A e B commutano è $k = 1$.

(b) Sostituendo $k = 2$ nei prodotti già calcolati:

$$AB = 8\begin{bmatrix} 4 & 24 & -2 \\ 6 & -4 & -3 \\ 16 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad BA = 8\begin{bmatrix} 2 & 20 & 3-1 \\ 6 & -4 & -3 \\ 12 & -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Per stabilire che AB e BA hanno gli stessi autovalori basta verificare che le matrici $AB/8$ e $BA/8$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$\det(AB/8 - \lambda I) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 + 128\lambda,$$

$$\det(BA/8 - \lambda I) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 + 128\lambda.$$

(c) (*facoltativo*) Se una delle due matrici è invertibile il risultato è immediata conseguenza del fatto che AB e BA sono simili: infatti, se $\det A \neq 0$ si ha $AB = A(BA)A^{-1}$.

Altrimenti si può procedere nel modo seguente: sia $\det A = \det B = 0$, dunque AB e BA sono singolari, e si consideri λ autovalore di AB, si deve dimostrare che λ è anche autovalore di BA. Se $\lambda = 0$, è anche autovalore di BA, perché BA è singolare. Se $\lambda \neq 0$, sia $\mathbf{x}$ un suo autovettore:

$$AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per B ne segue

$$BA(B\mathbf{x}) = \lambda B\mathbf{x},$$

dove $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, altrimenti sarebbe $\lambda = 0$. Quindi λ è autovalore di BA con autovettore $B\mathbf{x}$. Analogamente si procede per dimostrare che gli autovalori di BA sono autovalori di AB.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 1 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di Gauss, ma se si interviene sulla matrice aumentata con le seguenti combinazioni lineari:

dalla prima riga si sottrae la quarta,

dalla seconda riga si sottrae la terza,

alla terza riga si aggiunge la seconda,

alla quarta riga si aggiunge la prima,

si ottiene la matrice aumentata seguente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -32 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right],$$

che rappresenta i due sistemi lineari

$$\begin{bmatrix} -32 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Il primo sistema ha la soluzione nulla, $a_0 = a_2 = 0$, il secondo ha la soluzione $a_1 = 5$, $a_3 = -4$, quindi il polinomio di interpolazione è $p(x) = 5x^2 - 4$.

(b) I polinomi $L_j(x)$, $j = 0, \dots, 3$, che intervengono nella formula di Lagrange sono:

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{-12}, \quad L_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6},$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{-6}, \quad L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{12}.$$

Dalla formula di Lagrange applicata per $x = 0$ si ottiene:

$$p(0) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j)L_j(0) = 16 \cdot (-\frac{1}{6}) + 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot (-\frac{1}{6}) = -4.$$