Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 15 gennaio 2015

Esercizio 1

Si osserva subito, dal momento che è evidente, che A ha rango 2 e B ha rango 1.

(a) La matrice aumentata del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è la seguente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

che, con il metodo di Gauss, è ricondotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il teorema di Rouché-Capelli è verificato, le soluzioni esistono infinite, $\operatorname{rank} A = 2$ e, ponendo $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i vettori di V sono esprimibili come $\boldsymbol{x} = [\,-\alpha, \quad 2-\beta, \quad -\alpha, \quad \beta\,]^T$, ovvero

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per determinare $N(B)$ si riconduce B a forma triangolare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ha che $\operatorname{rank} B = 1$, e che i vettori di $N(B)$ hanno la forma

$$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) I vettori dell'intersezione W sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} A \\ \hline B \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata, tenendo conto delle forme triangolari ottenute separatamente al punto precedente, è riconducibile alla forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

avendo omesso le righe nulle. Con un'ulteriore combinazione lineare si ha:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right],$$

da cui si ha che il rango della matrice dei coefficienti è tre, il teorema di Rouché-Capelli è verificato, le soluzioni esistono infinite, e, ponendo $x_3 = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, i vettori di W sono esprimibili come $\boldsymbol{x} = [\,-\alpha, \quad 1, \quad \alpha, \quad 1\,]^T$, ovvero

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si può pertanto porre $\boldsymbol{y} = [\,0, \quad 1, \quad 0, \quad 1\,]^T$ e $\boldsymbol{z} = [\,-1, \quad 0, \quad 1, \quad 0\,]^T$, dal momento che i due vettori sono già ortogonali.

(c) Si deve rendere minima la lunghezza $||\boldsymbol{x}||$, che è lo stesso, trattandosi di una quantità non negativa, che rendere minimo il quadrato $||\boldsymbol{x}||^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} + \alpha^2\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z} = 2(1+\alpha^2)$. Il minimo si ha ovviamente per $\alpha = 0$, che corrisponde al vettore $\boldsymbol{y}$.

Esercizio 2

Sia $Q = [\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2]$, allora $V = S(Q)$, e quindi $V^\perp = N(Q^T)$. Con il metodo di Gauss Q^T si riduce alla forma triangolare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

e quindi dim $V = 2$, dim $V^\perp = 1$, e come base di $V^\perp$ si può prendere $\{\boldsymbol{v}_3\}$, dove $\boldsymbol{v}_3 = [\,-1, \quad 1, \quad 2\,]^T$.

(a) Il modo più veloce per determinare la matrice P consiste nel partire dalla matrice che rappresenta la proiezione p rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, e che è ovviamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per poi ottenere P da A con il cambiamento dalla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ alla base canonica. La matrice di questo cambiamento di base è

$$S = [\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

quindi

$$P = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

dopo aver calcolato l'inversa

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

P non è invertibile perché rappresenta p, che essendo la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su un sottospazio proprio è un'applicazione lineare non invertibile.

(b) (*facoltativo*) Si osservi che $\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = 0$, cioè i due vettori sono ortogonali. Se si pone $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3$, e si moltiplichino entrambi i membri per $\boldsymbol{v}_1^T$, a sinistra, si ottiene

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{x} = \alpha_1||v_1||^2,$$

e, moltiplicando invece entrambi i membri per $\boldsymbol{v}_2^T$, a sinistra, si ottiene

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{x} = \alpha_2||v_2||^2,$$

ricavandone i valori

$$\alpha_1 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_1\frac{1}{||v_1||^2}, \quad \alpha_2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_2\frac{1}{||v_2||^2}.$$

Poiché $p(\boldsymbol{x}) = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2$, sostituendo si ottiene l'espressione richiesta.

Esercizio 3

Per studiare la diagonalizzabilità di A è necessario calcolarne gli autovettori. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1 \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 1, \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

A ha tre autovalori distinti, pertanto è diagonalizzabile. La matrice S di una trasformazione per similitudine che diagonalizza A si ottiene affiancando, per colonna, tre autovettori linearmente indipendenti. Per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ gli autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo con matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che hanno la forma $\alpha[\,0, \quad 1, \quad 1\,]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Per l'autovalore $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ gli autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo con matrice

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

che hanno la forma $\alpha[\,-\sqrt{2}, \quad -1, \quad 1\,]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Infine, per l'autovalore $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$ gli autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo con matrice

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

che hanno la forma $\alpha[\,\sqrt{2}, \quad -1, \quad 1\,]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Quindi si può scegliere

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e sarà necessariamente

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno (retta di regressione lineare) $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V^T V\boldsymbol{a} = V^T\boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^T V|V^T\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{a} = [3/7,\ 6/7]^T$, e quindi $p(x) = \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}$.

(b) Posto $\boldsymbol{g} = [\,g(x_0),\ g(x_1),\ g(x_2)\,]$, si vuole che per lo stesso vettore di coefficienti $\boldsymbol{a}$ sia $V^T V\boldsymbol{a} = V^T\boldsymbol{f}$ e $V^T V\boldsymbol{a} = V^T\boldsymbol{g}$, ne segue che deve essere $V^T\boldsymbol{f} = V^T\boldsymbol{g}$ e quindi $(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}) \in N(V^T)$. V^T si riduce con il metodo di Gauss alla forma triangolare

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

da cui si ha che $\dim N(V^T) = 1$, e che i vettori del nucleo hanno la forma $\alpha[\,2,\ -3,\ 1\,]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$. La relazione richiesta è quindi

$$g(x_0) = f(x_0) + 2\alpha, \quad g(x_1) = f(x_1) - 3\alpha, \quad g(x_2) = f(x_2) + \alpha,$$

per qualche α.