Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 1 febbraio 2013

Esercizio 1

(a) Poiché $S(A)^\perp = N(A^T)$ si applica il metodo di Gauss alla matrice A^T:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ottenendo successivamente le matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 10/3 & -2/3 & 2 \\ 0 & 10/3 & -2/3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi si ha $\operatorname{rank} A^T = 2$, $\dim N(A^T) = 2$. I vettori di $N(A^T)$ hanno la forma

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base formata da vettori con elementi interi è

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Si osserva che $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono ortogonali, quindi è sufficiente normalizzarli, ottenendo così i vettori della base richiesta:

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{x}_2.$$

(b) Si tratta di verificare se esistono vettori non nulli nell'intersezione $\mathcal{K} = N(A) \cap N(A^T)$. Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$, e lo si esprima rispetto alla base di $N(A^T)$ trovata in (a): $\mathbf{x} = \gamma_1\mathbf{x}_1 + \gamma_2\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Deve essere $\mathbf{0} = A\mathbf{x} = \gamma_1 A\mathbf{x}_1 + \gamma_2 A\mathbf{x}_2$ quindi si ha una combinazione lineare nulla di $A\mathbf{x}_1$ e $A\mathbf{x}_2$: ma $A\mathbf{x}_1 = [-21\ 8\ 11\ 9]^T$ e $A\mathbf{x}_2 = [-15\ 10\ 7\ 9]^T$ sono linearmente indipendenti, quindi $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, e $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

In alternativa, osservando che $\mathcal{K} = N(B)$, dove $B = \begin{bmatrix} A^T \\ — \\ A \end{bmatrix}$, si può calcolare $r = \operatorname{rank} B$, e ricavare $\dim \mathcal{K} = 4 - r$. Per il calcolo di r, in B ad A^T si può sostituire la matrice triangolare ottenuta con il metodo di Gauss al punto (a), e ad A (che deve avere lo stesso rango di A^T) si può sostituire la matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & -1 \\ 0 & -5/3 & 10/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ottenuta applicando il metodo di Gauss ad A. Dunque

$$r = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1/3 & -1 \\ 3 & 5 & -7 & -1 \\ 0 & -5/3 & 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 29/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 13/3 - 17/7 \end{bmatrix} = 4.$$

Pertanto $\dim \mathcal{K} = 0$.

Esercizio 2

(a) Con il metodo di Gauss, da A si ottengono le matrici

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\operatorname{rank} A = 3$. Si calcola A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

e risulta $\operatorname{rank} A^2 = 2$, poiché la prima e la quarta colonna sono linearmente indipendenti, mentre la seconda e la terza colonna sono combinazioni lineari della prima.

(b) Si supponga A diagonalizzabile: esiste quindi S invertibile tale che sia $S^{-1}AS = D$, D diagonale. Si osservi che D ha lo stesso rango di A, che è quindi il numero r di elementi d_{ii} non nulli. Ragionando analogamente su A^2, si ha $S^{-1}A^2S = S^{-1}ASS^{-1}AS = D^2$, quindi A^2 ha lo stesso rango di D^2, che vale r, perché gli elementi diagonali di D^2 sono i quadrati degli elementi diagonali di D. Ne seguirebbe che A e A^2 avrebbero lo stesso rango r, il che contraddice quanto trovato al punto (a). Quindi A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3

Dalla definizione si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss alla matrice aumentata $[A|I]$ si ottengono le seguenti matrici:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Il rango è massimo, quindi A è invertibile. Le colonne dell'inversa si calcolano con una sostituzione all'indietro per ogni colonna dei termini noti:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In alternativa a Gauss, con una maggiore mole di calcoli, si può esprimere l'inversa come $(1/\det A)\text{adj}(A)$, calcolando il determinante di A e la parte triangolare superiore dell'aggiunta, che è simmetrica come A.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/(a-1) \\ 1/a \\ 1/(a+1) \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^T V|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2/(1-a^2) \\ 0 & 3 & (3a^2-1)/[a(a^2-1)] \end{array}\right].$$

La matrice dei coefficienti è diagonale, quindi si ha immediatamente

$$p(x) = \frac{1}{1-a^2}x + \frac{3a^2-1}{3a(a^2-1)}.$$

(b) Imponendo la condizione $p(0) = f(0)$ si ottiene l'equazione in a

$$\frac{3a^2-1}{3a(a^2-1)} = \frac{1}{a},$$

che non ha soluzioni.

(c) (*facoltativo*) Non è restrittivo supporre $k = 0$, ovvero i passaggi che seguono non dipendono dal particolare valore di k. Con le usuali posizioni

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix},$$

si avrà

$$V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}, \quad \text{e} \quad V\mathbf{a} - \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando entrambi i membri della seconda uguaglianza per V^T si ottiene

$$V^T V\mathbf{a} - V^T\mathbf{f} = V^T \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{0} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ma $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono linearmete indipendenti, quindi $\alpha = \beta = 0$, $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, il che significa che $p(x_i) = f(x_i)$ anche per $i = 1, 2$.