Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 3 febbraio 2014

Esercizio 1

(a) Tutte le soluzioni del sistema possono, al pari di ogni vettore di $\mathbf{R}^4$, essere espresse come richiesto, dal momento che $\mathbf{R}^4 = N(A)^\perp \bigoplus N(A)$. Si tratta di indicare i vettori $\mathbf{u}$ in $N(A)^\perp$ e $\mathbf{v}$ in $N(A)$ la cui somma dà una soluzione.

Con il metodo di Gauss si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = [A|\mathbf{b}^{(1)}], \quad [A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -26/13 & -13/3 & 0 \end{array}\right],$$

$$[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Poiché $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^{(4)} = 3$ e $\operatorname{rk}[A|\mathbf{b}] = \operatorname{rk}[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = 3$, il teorema di Rouché-Capelli è verificato ed esistono soluzioni. Dal momento che $\dim N(A) = 4 - \operatorname{rk} A = 1$ le soluzioni sono infinite. Dal sistema ottenuto all'ultimo passo del metodo di Gauss si ottiene che l'insieme delle soluzioni è composto da vettori $\mathbf{x}$ della forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, dove $\mathbf{y} = [-1\ 0\ 0\ 0\,]^T$ è una soluzione particolare, e $\mathbf{z} = \alpha[\,1\ -1/2\ -1/2\ 1\,]^T$ con $\alpha \in \mathbf{R}$, è un generico vettore di $N(A)$.

Ora si supponga di esprimere $\mathbf{y}$ come somma diretta $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, con $\mathbf{y}_1 \in N(A)^\perp$ e $\mathbf{y}_2 \in N(A)$. Si ha chiaramente che i vettori richiesti possono essere scelti come $\mathbf{u} = \mathbf{y}_1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}$.

Per calcolare direttamente $\mathbf{y}_1$ senza risolvere altri sistemi lineari si può procedere nel modo seguente. Si assuma come generatore di $N(A)$ il vettore $\bar{\mathbf{z}} = [1\ \ -1/2\ \ -1/2\ \ 1]^T$, per cui si avrà $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \beta\bar{\mathbf{z}}$. Moltiplicando entrambi i membri, a sinistra, per $\bar{\mathbf{z}}^T$ si ha:

$$\bar{\mathbf{z}}^T\mathbf{y} = \beta\,\bar{\mathbf{z}}^T\mathbf{z},$$

da cui

$$\beta = \frac{\bar{\mathbf{z}}^T\mathbf{y}}{\bar{\mathbf{z}}^T\mathbf{z}} = -\frac{2}{5},$$

e quindi

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_1 = \mathbf{y} - \beta\overline{\mathbf{z}} = \frac{1}{5}[-3 \ \ -1 \ \ -1 \ 2]^T,$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}_2 + \mathbf{z} = \beta\overline{\mathbf{z}} + \alpha\overline{\mathbf{z}} = \gamma\overline{\mathbf{z}},$$

dove $\gamma = \beta + \alpha$. Si osservi che si può scegliere lo stesso vettore $\mathbf{u}$ per tutte le soluzioni.

(b) (*facoltativo*) Si supponga che l'insieme delle soluzioni si possa esprimere come $\{\mathbf{x} | \, \mathbf{x} = \mathbf{u} + \alpha\overline{\mathbf{z}}, \alpha \in \mathbf{R}\}$, oppure come $\{\mathbf{x} | \, \mathbf{x} = \mathbf{u}' + \alpha\overline{\mathbf{z}}, \alpha \in \mathbf{R}\}$, con $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in N(A)^{\perp}$. Esprimendo la soluzione particolare $\mathbf{u}$ come $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \alpha\overline{\mathbf{z}}$ si ottiene $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \alpha\overline{\mathbf{z}}$, da cui, trattandosi di sottospazi che formano una somma diretta, $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{u}$ è univocamente determinato.

Esercizio 2

(a) Le matrici quadrate reali 2×2 sono un spazio vettoriale di dimensione 4. Per verificare che V è un sottospazio basta accertarsi che sia chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Ma è ovvio che la somma di due matrici simmetriche è simmetrica e che il prodotto di una matrice simmetrica per uno scalare dà una matrice simmetrica. Quindi V è un sottospazio, e la sua dimensione deve essere minore di 4.

Per determinare la dimensione di V se ne cerca una base. Ogni matrice simmetrica S può essere espressa come

$$S = s_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + s_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le tre matrici

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

sono linearmente indipendenti, quindi formano una base, e $\dim(V) = 3$.

(b) Si verifica facilmente che $f(S+T) = f(S)+f(T)$ e $f(\alpha S) = \alpha f(S)$, per S e $T \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$. Quindi f è lineare. Per determinare la matrice che rappresenta f rispetto alla base scelta, si osservi che:

$$f(S_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_1 + S_2,$$

$$f(S_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_1 - S_2,$$

$$f(S_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2S_3,$$

quindi la matrice A è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Per calcolare gli autovalori di A si determina prima il suo polinomio caratteristico che è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2).$$

Pertanto gli autovalori sono 2, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, e l'autovalore massimo in modulo è $\lambda = 2$. Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni $\mathbf{x}$ non nulle del sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

che hanno la forma $\mathbf{x} = \alpha[\,0\ 0\ 1\,]$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Le corrispondenti matrici sono della forma

$$\alpha S_3 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

A è diagonalizzabile perché è simmetrica.

Esercizio 3

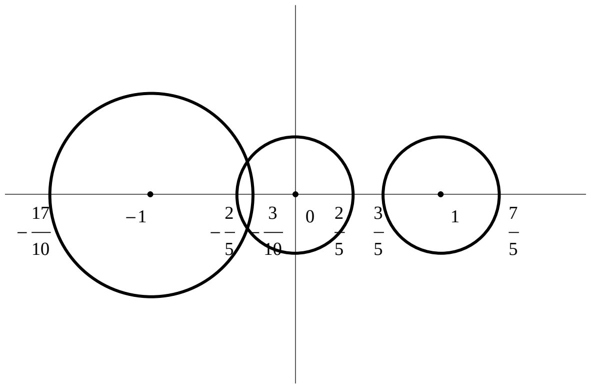
I cerchi per riga sono:

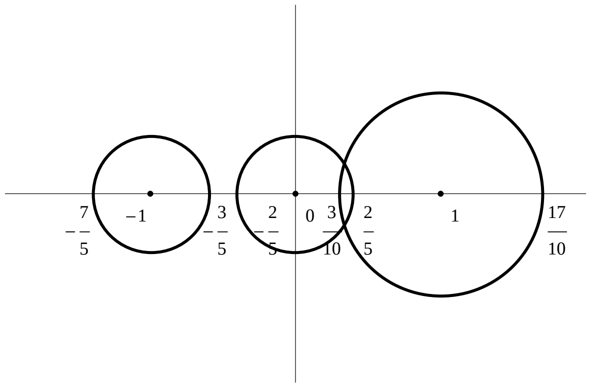
K_1, con centro -1 e raggio 7/10,
K_2, con centro 0 e raggio 2/5,
K_3, con centro 1 e raggio 2/5,

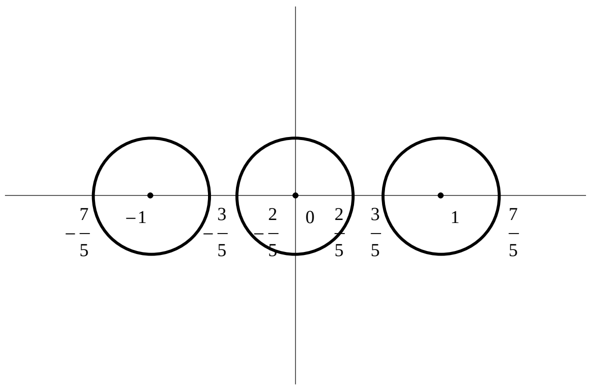
e quelli per colonna sono

H_1, con centro -1 e raggio 2/5,
H_2, con centro 0 e raggio 2/5,
H_3, con centro 1 e raggio 7/10.

Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni.







(a) K_3 è disgiunto da $K_1 \cup K_2$, quindi contiene un solo autovalore λ_3, che deve essre reale. H_1 è disgiunto da $H_2 \cup H_3$, quindi contiene un solo autovalore λ_1, che deve essre reale. Ne segue che anche λ_2 deve essere reale.

Dalla localizzazione per righe risulta $3/5 \leq \lambda_3 \leq 7/5$.

Dalla localizzazione per colonne risulta $-7/5 \leq \lambda_1 \leq -3/5$.

Dall'intersezione delle due unioni si ha infine che $-2/5 \leq \lambda_2 \leq 2/5$.

(b) A e B sono simili, e quindi hanno gli stessi autovalori. Poiché

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{5} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{\alpha}{5} \\ \frac{1}{5\alpha} & \frac{1}{5\alpha} & 1 \end{bmatrix},$$

affinché i cerchi per colonna di B siano a due a due disgiunti $|\alpha|$ deve soddisfare le disuguaglianze

$$-1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5|\alpha|} < -\frac{1}{5} - \frac{1}{5|\alpha|},$$

e

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5|\alpha|} < 1 - \frac{|\alpha|}{2} - \frac{|\alpha|}{5}.$$

Dalla prima si ricava $|\alpha| > 2/3$, dalla seconda $\frac{4-2\sqrt{2}}{7} < |\alpha| < \frac{4+2\sqrt{2}}{7}$, per cui soddisfano la condizione richiesta tutti i valori di $|\alpha|$ tali che

$$\frac{2}{3} < |\alpha| < \frac{4+2\sqrt{2}}{7},$$

ad esempio $|\alpha| = 5/7$.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di Gauss, e, dopo aver scambiato la seconda riga con la terza, si otteiene la seguenta matrice aumentata finale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Il sistema ha la soluzione $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, e $a_0 = -\frac{1}{18}$. Il polinomio di interpolazione è $p(x) = -\frac{1}{18}x^2 + 1$.

(b) Si ha $\det V = -54$, e usando la matrice aggiunta, si trova

$$V^{-1} = -\frac{1}{54}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & -9 \\ 0 & -54 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/18 & -1/9 & 1/18 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si verifica facilmente che

$$\mathbf{a} = V^{-1}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/18 & -1/9 & 1/18 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/18 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$