Soluzione della prova scritta di di Algebra lineare del 4 febbraio 2015

Esercizio 1

(a) Usando il metodo di Gauss, per i quatto sottospazi proposti si ha:

$$\dim S(A) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

e una base è l'insieme formato dalle prime due colonne di A:

$$\{[\,2,\ -2,\ -2\,]^T, [\,-1,\ 0,\ 1\,]^T\};$$

$$\dim S(B) = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

e una base è l'insieme formato dalle prime due colonne di B:

$$\{[\,-4,\ 4,\ 2\,]^T, [\,3,\ -2,\ -1\,]^T\};$$

$$\dim S(A+B) = \operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

e una base è l'insieme formato dalla prima e dalla terza colonna di $A + B$:

$$\{[\,-2,\ 2,\ 0\,]^T, [\,3,\ -2,\ -1\,]^T\};$$

$S(A) + S(B)$ è generato dai vettori dell'unione delle basi di $S(A)$ e di $S(B)$, quindi

$$\dim (S(A) + S(B)) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 3,$$

e come base si può prendere una qualunque terna di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si osservi che $S(A) + S(B) = \mathbb{R}^3$, e che dim $S(A + B) = 2$.

(c) Si deve dimostrare l'inclusione $S(A+B) \subset S(A)+S(B)$. Sia $\boldsymbol{y} \in S(A+B)$, allora esiste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{y} = (A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$, dove $\boldsymbol{y}_1 = A\boldsymbol{x} \in S(A)$ e $\boldsymbol{y}_2 = B\boldsymbol{x} \in S(B)$. Dunque $\boldsymbol{y} \in (S(A)+S(B)$.

Esercizio 2

(a) Si ha infatti

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Se si espande il quadrato di $A - I$ nella relazione verificata al punto (a) si ottiene:

$$(A - I)^2 = A^2 - A - A - I^2 = A^2 - 2A + I = A(A - 2I) + I = O,$$

e quindi $A(A - 2I) = -I$. Se ne deduce che A è invertibile e

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Se si usa il metodo di Gauss-Jordan si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Esercizio 3

(a) Per calcolare il polinomio caratteristico di A si può applicare ripetutamente la regola di Laplace alla matrice $A - \lambda I$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 - 1.$$

Gli autovalori sono le quattro radici quarte di 1: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \mathbf{i},\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = -\mathbf{i}$. A ha quattro autovalori distinti, e quindi è diagonalizzabile.

(b) $A + I$ ha autovalori $\mu_i = \lambda_i + 1,\ i = 1, \ldots, 4$: sono distinti, quindi anche $A+I$ è diagonalizzabile. Senza fare riferimento agli autovalori si può osservare che una trasformazione che diagonalizza A diagonalizza anche $A+I$: infatti, se S è la matrice che rappresenta la trasformazione si ha

$$S^{-1}(A + I)S = S^{-1}AS + S^{-1}S = D + I,$$

con D diagonale.

(c) Ragionando come al punto precedente, se $S^{-1}AS = D$ si ha:

$$S^{-1}A^2S = S^{-1}ASS^{-1}AS = D^2.$$

Poiché D^2 è diagonale, A^2 è diagonalizzabile.

(d) (*facoltativo*) È

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è diagonalizzabile, essendo simmetrica. Tuttavia il fatto che A^2 sia diagonalizzabile non implica, in generale, che A lo sia. Ad esempio la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile perché ha soltanto autovettori della forma $[\,0,\ \alpha\,]^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Però $B^2 = O$ è diagonalizzabile (è già diagonale).

Esercizio 4

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V|\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & k \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & k-2 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{a} = [(k-2)/3,\ 1,\ (2-k)/3]^T$, e quindi $p(x) = \frac{k-2}{3}x^2 + x + \frac{2-k}{3}$.

(b) Con la formula di Lagrange si calcolano direttamente i valori

$$L_0(0) = \frac{(0-x_1)(0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{3},$$

$$L_1(0) = \frac{(0-x_0)(0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = 1,$$

$$L_2(0) = \frac{(0-x_0)(0-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = -\frac{1}{3},$$

dai quali si ottiene

$$p(0) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 + k \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{2-k}{3},$$

che coincide con il termine noto del polinomio trovato al punto (a).

(c) Si osserva che la funzione $f(x)$ assume nei nodi x_i i valori già utilizzati ai punti (a) e (b), con $k = 2 + \log\frac{5}{2}$. Quindi si ottiene immediatamente dai punti precedenti $p(0) = -\frac{1}{3}\log\frac{5}{2}$.