

Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 10 giugno 2014

Esercizio 1

- (a) È evidente che i vettori \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 non sono proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti: dunque il sottospazio da loro generato ha dimensione 2. Per lo stesso motivo si ha che il sottospazio generato da \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 ha dimensione 2. In alternativa si può applicare il metodo di Gauss alle due matrici ottenute affiancando i vettori dati, ottenendo, per il primo sottospazio

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 0 & -18 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e per il secondo

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 5 \\ -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \\ -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 16/3 \\ 0 & 8/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim U = \dim V = 2$.

- (b) Per determinare la dimensione di $U + V$ si applica il metodo di Gauss alla matrice $A = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]$:

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & -18 & -1 & -17 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 25/2 & -25/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 25/2 & -25/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim(U + V) = \text{rank} A^{(4)} = 3$, e come base si può scegliere $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$.

- (c) $U + V \neq \mathbf{R}^4$, e come vettore di \mathbf{R}^4 non appartenente a $U + V$ si può scegliere qualunque vettore non nullo di $(U + V)^\perp = S(A)^\perp = N(A^T)$.

Se si riduce A^T in forma triangolare superiore con il metodo di Gauss si ottiene facilmente la matrice finale

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -18 & 2 \\ 0 & 0 & 25/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vettore non nullo a elementi interi di $N(A^T)$ è $[-12 \ 8 \ 1 \ 25]^T$.

Esercizio 2

- (a) La colonna j -esima di A è formata dai coefficienti che esprimono $f(\mathbf{e}_j)$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica, e quindi è proprio $f(\mathbf{e}_j)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

f non è invertibile perché A è singolare.

- (b) La matrice B può essere costruita nello stesso modo in cui è stata costruita A , ma può anche essere calcolata usando la relazione che la lega alla matrice A e alla matrice di cambiamento di base P , che in questo caso è la seguente:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che P è una matrice di permutazione, e quindi $P^{-1} = P^T$. Si ha infine:

$$B = P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

(a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & -3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3).$$

Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}i$, $\lambda_3 = \sqrt{3}i$. Essi sono distinti, quindi A è diagonalizzabile.

(b) Si verifica facilmente che

$$JA = -AJ = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Siano λ e \mathbf{x} rispettivamente un autovalore e un corrispondente autovettore di una matrice A che gode della relazione precedente. Si ha

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

$$JA\mathbf{x} = \lambda J\mathbf{x},$$

$$-AJ\mathbf{x} = \lambda J\mathbf{x},$$

quindi $AJ\mathbf{x} = -\lambda J\mathbf{x}$, ovvero, essendo $J\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, A ammette autovalore $-\lambda$ con autovettore $J\mathbf{x}$.

(c) (*facoltativo*) Si osservi che per una matrice quadrata di ordine 3 che soddisfa la relazione precedente si deve avere $a_{11} = -a_{33}$ e $a_{22} = 0$, e quindi $\text{tr } A = 0$. Inoltre deve essere $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr } A$ e quindi la somma degli autovalori è nulla. Se gli autovalori sono tutti nulli la matrice è singolare. Se non sono tutti nulli, si supponga $\lambda_1 \neq 0$, uno dei restanti, sia esso λ_2 , deve essere l'opposto di λ_1 : deve dunque essere $\lambda_3 = 0$, quindi anche in questo caso la matrice è singolare.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ è la soluzione \mathbf{a} del sistema $V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di Gauss, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -1 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -4 \\ 0 & 6/5 & 7/5 \end{array} \right].$$

Il sistema ha la soluzione $a_1 = \frac{7}{6}$, e $a_0 = -\frac{3}{2}$. Il polinomio è $p(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$.

- (b) Affinché il polinomio ottenuto aggiungendo il nodo $x_3 = 4$ sia nullo è necessario e sufficiente che sia nullo il termine noto del sistema lineare di cui i suoi coefficienti sono soluzione. Tale termine noto ha la forma $W^T \mathbf{g}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} V \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ f(4) \end{bmatrix}.$$

Si deve quindi avere

$$W^T \mathbf{g} = V^T \mathbf{f} + f(4) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} + f(4) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Si ottiene che deve essere $f(4) = 1$.