Soluzione della prova scritta di di Algebra lineare del 10 giugno 2015

Esercizio 1

(a) La matrice A che rappresenta f rispetto alle basi assegnate è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Applicando il metodo di Gauss alla matrice A si ottiene facilmente la forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim S(A) = \operatorname{rank} A = 3$ e $\dim(N(A)) = 3 - \operatorname{rank} A = 0$. L'immagine di A è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle tre colonne di A, mentre il nucleo è il sottospazio banale di $\mathbb{R}^3$.

(c) I valori di α richiesti sono quelli per i quali il rango della matrice $[\,A \mid \boldsymbol{z}\,]$ vale 3. Applicando il metodo di Gauss a tale matrice si ottiene la forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si deduce che il rango è 4 per ogni α. Non esistono dunque valori di α per i quali $\boldsymbol{z} \in S(A)$.

(d) (*facoltativo*) Il problema può essere formulato come sistema lineare. Trasponendo entrambi i membri della relazione assegnata si ha infatti $A^T B^T = I_3$, ovvero tre sistemi lineari con matrice dei coefficienti A^T e soluzioni le colonne di B^T: questi sistemi hanno infinite soluzioni, perché $\operatorname{rank} A^T = 3$, il teorema di Rouché-Capelli è verificato per qualunque termine noto, e $\dim(N(A^T)) = 4 - \operatorname{rank} A^T = 1$. Quindi tutte le matrici B che soddisfano la relazione possono essere individuate applicando il metodo di Gauss alla matrice aumentata $[\,A^T \mid I_3\,]$. Tuttavia una soluzione B può essere determinata direttamente osservando che, se si pone $B = [\,B_1 \mid \boldsymbol{b}_4]$, dove la matrice B_1 è formata dalle prime 3 colonne di B e $\boldsymbol{b}_4$ è la quarta colonna, e, analogamente

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hline \boldsymbol{a}_4^T \end{bmatrix},$$

dove la matrice A_1 è formata dalle prime 3 righe di A e $\boldsymbol{a}_4^T$ è la quarta riga, la relazione si scrive come

$$B_1 A_1 + \boldsymbol{b}_4 \boldsymbol{a}_4^T = I_3.$$

Quindi, se A_1 è invertibile e si sceglie $\boldsymbol{b}_4 = \mathbf{0}$, una soluzione è $B = [\,A_1^{-1}\,|\,\mathbf{0}]$. Resta da verificare che A_1 sia non singolare, usando la riduzione a forma triangolare di A calcolata al punto (c):

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

Esercizio 2

Per dimostrare che i vettori $\boldsymbol{x}, D\boldsymbol{x}, D^2\boldsymbol{x}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ si dimostra che la matrice

$$A = \left[\ \boldsymbol{x}, D\boldsymbol{x}, D^2\boldsymbol{x}\ \right] = \begin{bmatrix} x_1 & d_1 x_1 & d_1^2 x_1 \\ x_2 & d_2 x_2 & d_2^2 x_2 \\ x_3 & d_3 x_3 & d_3^2 x_3 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Basta osservare che vale la relazione

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 & d_1^2 \\ 1 & d_2 & d_2^2 \\ 1 & d_3 & d_3^2 \end{bmatrix},$$

e che l'ultima matrice si può ottenere dalla matrice di Vandermonde V di ordine 3, relativa ai nodi d_1, d_2, d_3, scambiando la prima e la terza colonna. Pertanto si ha:

$$\det A = x_1 x_2 x_3 (-1) \det V = -x_1 x_2 x_3 (d_1 - d_2)(d_1 - d_3)(d_2 - d_3).$$

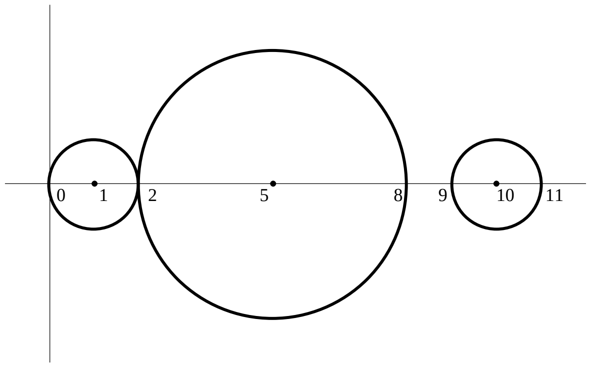
Poiché per ipotesi i valori x_i sono non nulli e i valori d_i distinti, tale determinante è non nullo. Allo stesso risultato si arriva calcolando il determinante di A con il metodo di Gauss.

Esercizio 3

I cerchi per riga di A (che coincidono con quelli per colonna) sono:

$$\begin{aligned} &K_1, && \text{con centro 10 e raggio 1,}\\ &K_2 = K_3, && \text{con centro 1 e raggio 1,}\\ &K_4, && \text{con centro 5 e raggio 3.} \end{aligned}$$

Essi sono rappresentati nella seguente figura:



(a) Dal teorema di Gerschgorin, essendo K_1 disgiunto dall'unione dei restanti cerchi, esso contiene un solo autovalore necessariamente reale: λ_4, con $9 \leq \lambda_4 \leq 11$. Gli altri tre autovalori, di cui almeno uno reale, appartengono all'unione $K_2 \cup K_4$: si ha dunque $|\lambda_i| \leq 8$, $i = 2, 3, 4$; nel caso che λ_i sia reale si ha $0 \leq \lambda_i \leq 8$.

(b) La matrice B è

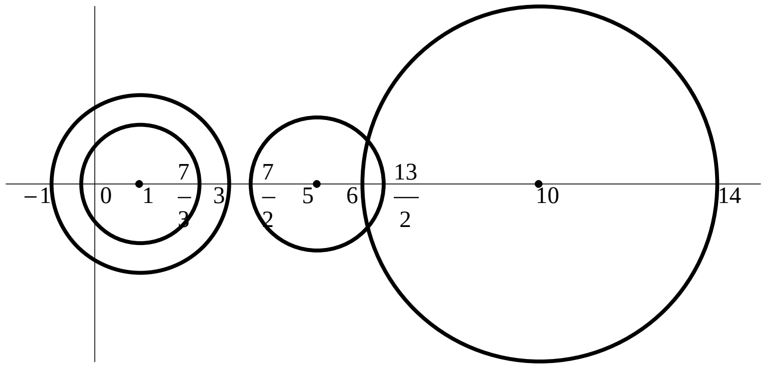
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 4 & 2 & 4/3 & 5 \end{bmatrix},$$

e ha gli stessi autovalori di A, perché ottenuta con una trasformazione per similitudine. L'unione dei cerchi di Gerschgorin per riga di B coincide con il cerchio relativo alla quarta riga, di centro 5 e raggio $22/3$, da cui risulta $|\lambda_i| \leq 37/3$, $i = 1, \dots, 4$, con $-7/3 \leq \lambda_i \leq 37/3$ nel caso che λ_i sia reale. Quindi non si migliora la localizzazione stabilita in (a).

I cerchi di B per colonna sono i seguenti:

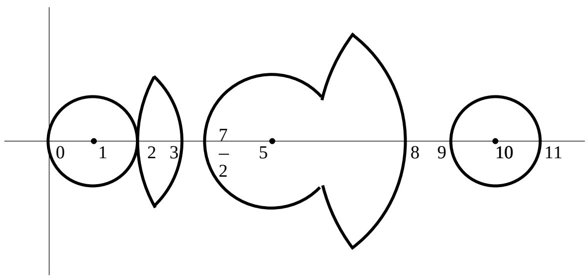
$$\begin{aligned} &H_1, \text{ con centro 10 e raggio 4,}\\ &H_2, \text{ con centro 1 e raggio 2,}\\ &H_3, \text{ con centro 1 e raggio } 4/3,\\ &H_4, \text{ con centro 5 e raggio } 3/2. \end{aligned}$$

Essi sono rappresentati nella seguente figura:



L'unione $H_1 \cup H_4$ contiene esattamente due autovalori: uno di loro è reale, perché al punto (a) si è stabilito che esiste λ_4 reale, con $9 \le \lambda_4 \le 11$, quindi anche l'altro, sia esso λ_3, deve essere reale. I restanti autovalori λ_1 e λ_2 (che possono essere reali o non reali) appartengono al cerchio H_2, e hanno modulo minore o uguale di 3.

Dall'intersezione delle due unioni, quella dei cerchi di A e quella dei cerchi (per colonna) di B,



si ha anche che $7/2 \le \lambda_3 \le 8$.

(c) Si verifica che $\det(A - I) = 0$. Infatti

$$A - I = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ha due righe uguali. Si osservi, per inciso, che sapendo che 1 è autovalore, tenendo conto di quanto ottenuto nei punti precedenti, si conclude che tutti gli autovalori di A sono reali. Per calcolare un autovettore $\boldsymbol{x}$

si triangolarizza $A - I$ con il metodo di Gauss, e si ottiene

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui, ponendo $x_3 = 1$, si ha $\boldsymbol{x}^T = [\,0,\ -1,\ 1,\ 0\,]$.

Esercizio 4

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2-\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V|\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\sqrt{3} \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss, scambiando la prima con la terza riga, si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 2-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{a} = [\sqrt{3}-1,\ 1-2\sqrt{3},\ 2]^T$, e quindi $p(x) = (\sqrt{3}-1)x^2 + (1-2\sqrt{3})x + 2$.

(b) Per la formula di Lagrange servono soltanto i polinomi $L_0(x)$ e $L_1(x)$, perché $f(x_2) = 0$.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -x(x-2).$$

Si ha quindi

$$p(x) = 2\cdot\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + (2-\sqrt{3})\cdot(-x(x-2)) = (\sqrt{3}-1)x^2 + (1-2\sqrt{3})x + 2.$$