Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 5 luglio 2013

Esercizio 1

(a) Si deve verificare la chiusura di V rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in V$, posto $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, si ha

$$z_i = x_i + y_i = x_{i-1} + x_{i+1} + y_{i-1} + y_{i+1} = z_{i-1} + z_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

quindi $\mathbf{z} \in V$.

(b) I vettori di V sono soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dunque $V = N(A)$. La matrice $(n-2) \times n$ A è già in forma triangolare superiore a scalini, e il suo rango è $n-2$. Ne segue che $\dim V = n - \operatorname{rk} A = 2$.

Una base di V è formata dai vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, ottenuti risolvendo con la sostituzione all'indietro il sistema, dopo aver posto $x_n^{(1)} = 1$, $x_{n-1}^{(1)} = 0$, $x_n^{(2)} = 0$, $x_{n-1}^{(2)} = 1$:

$$\mathbf{x}_1^T = [\ldots\ 1\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1],\ \mathbf{x}_2^T = [\ldots\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0].$$

(c) Per $n = 5$, si considera la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ indicata al punto precedente, e la si ortonormalizza con il metodo di Gram-Schmidt, ottenendo la base $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$:

$$\mathbf{x}_1^T = [0\ -1\ -1\ 0\ 1],\ \mathbf{x}_2^T = [-1\ 0\ 1\ 1\ 0],$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1}} \mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} [0\ -1\ -1\ 0\ 1]^T,$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_1)\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 - \frac{-1}{\sqrt{3}} \mathbf{y}_1 = \left[-1\ -\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 1\ \frac{1}{3} \right]^T,$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_2}} \mathbf{t}_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} [-3\ -1\ 2\ 3\ 1]^T.$$

Esercizio 2

(a) La matrice aumentata $[\,A\,|\,\mathbf{b}\,]$ è la seguente:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Si può osservare immediatamente che il termine noto è uguale alla n-esima colonna di A: questo significa che il sistema ammette come soluzione $\mathbf{e}_n = [\,0\ \cdots\ 0\ 1\,]^T$. Per verificare se esistono altre soluzioni si applica il metodo di Gauss, che conduce, dopo $n-1$ passi, alla matrice aumentata:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

A è non singolare, quindi $\mathbf{e}_n$ è l'unica soluzione, come si può verificare sostituendo all'indietro.

(b) Comunque si modifichi a_{n1}, il termine noto è uguale all'n-esima colonna di A, pertanto $\mathbf{e}_n$ è soluzione.

Si può aggiungere che per nessun valore di a_{n1} si possono avere infinite soluzioni: basta osservare che, detta $\tilde{A}$ la matrice modificata, e dette $\mathbf{r}_i$ le righe di A, la combinazione lineare $\mathbf{r}_n - a_{n1}\mathbf{r}_1 + a_{n1}\mathbf{r}_2$ dà l'n-sima riga di $\tilde{A}$, quindi $\det \tilde{A} = \det A \neq 0$.

Esercizio 3

(a) I cerchi di Gerschgorin per riga (quelli per colonna sono gli stessi) distinti sono due: K_1 di centro 1 e raggio $|k|$, e K_2 di centro 2 e raggio $2|k|$. Per ottenere limitazioni per uno degli autovalori reali di A (necessariamente almeno uno degli autovalori è reale) si impone su k la condizione che rende i due cerchi disgiunti, ovvero $|k| < \frac{1}{3}$. In questo caso K_2 contiene un solo autovalore reale $\lambda|$, appartenente al suo diametro $[\,2-2|k|, 2+2|k|\,]$: pertanto sarà $\lambda \geq 2-2|k| > 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(b) Si ottiene $A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi, per qualunque valore di k, A ammette atovalore $\lambda_1 = 1$.

(c) Sia $k < \frac{1}{3}$, ad esempio $k = \frac{1}{4}$. Si calcola il polinomio caratteristico di A, con la regola di Laplace:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 2-\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) + \frac{1}{16}\right] - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)(1-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \frac{41}{8}\lambda + \frac{17}{8}.$$

Dal punto (b), $\lambda_1 = 1$ è autovalore, quindi $p(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - 1)$:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 3\lambda - \frac{17}{8}\right),$$

per cui i restanti autovalori sono

$$\lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione di grado massimo uno $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix},$$

con $\mathbf{a} = [a_0 \; a_1]^T$ e $\mathbf{f} = [f(x_0) \; f(x_1)]^T$.

(b) Per l'inversa di V si ha

$$V^{-1} = \frac{1}{x_0 - x_1} \operatorname{adj}(V) = \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_1 & x_0 \end{bmatrix}.$$

Quindi la soluzione è

$$\mathbf{a} = V^{-1}\mathbf{f} = \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{bmatrix} f(x_0) - f(x_1) \\ x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0) \end{bmatrix}.$$

(c) (*facoltativo*) Poiché $q(x_i) = p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2$ e $q(x)$ ha grado al più due, basta determinare α in modo tale che

$$f(x_2) = q(x_2) = p(x_2) + \alpha(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

ovvero

$$\alpha = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (f(x_2) - p(x_2)).$$