# Soluzione della prova scritta di di Algebra lineare del 7 luglio 2015

## Esercizio 1

**(a)** I vettori di $V$ sono i vettori $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, quindi formano il nucleo della matrice $B$ che rappresenta l'applicazione lineare $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ rispetto alla base canonica. Pertanto $V$ è un sottospazio. Poiché $B = A - I$, dove $A$ è la matrice che rappresenta $f$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

e $I$ è la matrice identica di ordine 4, si ha

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha rango uno e conseguentemente nucleo di dimensione tre. Si ha anche che una base di $V$ è $\{\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \,\}$, dove $\boldsymbol{e}_i$ è l'$i$-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

**(b)** $f$ è invertibile perché lo è $A$, infatti $\det A = 2$ e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Inoltre si osservi che $f^{-1}(V)$ è l'immagine della matrice $C$ che rappresenta la restrizione di $f^{-1}$ a $V$: $C$ ha dimensione $4 \times 3$, e le colonne sono le immagini $f^{-1}(\boldsymbol{e}_i) = A^{-1}\boldsymbol{e}_i$ dei vettori della base di $V$. Quindi $C$ è la sottomatrice di $A^{-1}$ composta dalle prime tre colonne:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque $f^{-1}(V)$ è il sottospazio $S(C) = V$.

# Esercizio 2

Il sistema lineare viene riformulato, imponendo la condizione $x_1 - x_3 = 0$, che può essere aggiunta come quarta equazione. Pertanto si ottiene il sistema $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, con

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & k & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & k-1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & k-1 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & k \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il teorema di Rouché-Capelli è verificato per tutti i valori di $k$. Per $k \neq 0$ esiste una sola soluzione, che è $[\,1/3, 0, 1/3\,]^T$. Per $k = 0$ le soluzioni sono infinite, e hanno la forma $[\,\alpha, 3\alpha - 1, \alpha\,]^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi per qualunque valore di $k$ esistono soluzioni della forma richiesta.

# Esercizio 3

**(a)** Gli autovalori di $A$ (reali perché $A$ è simmetrica) sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1),$$

come si ottiene facilmente applicando l'espansione di Laplace alla seconda riga. Pertanto si ottiene $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica due, e $\lambda_2 = -1$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_1$ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare $(A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, che hanno la forma $[\,\alpha, \beta, \alpha\,]^T$, con $\alpha$ e $\beta$ reali, non entrambi nulli.

Gli autovettori relativi a $\lambda_2$ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare $(A + I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, che hanno la forma $[\,-\alpha, 0, \alpha\,]^T$, con $\alpha$ reale non nullo.

**(b)** $A$ è diagonalizzabile perché è simmetrica.

**(c)** (*facoltativo*) Si osservi che

$$A_n - \lambda I_n = \begin{bmatrix} -\lambda & \mathbf{0}_{n-2}^T & 1 \\ \mathbf{0}_{n-2} & A_{n-2} - \lambda I_{n-2} & \mathbf{0}_{n-2} \\ 1 & \mathbf{0}_{n-2}^T & -\lambda \end{bmatrix},$$

dove con $\mathbf{0}_{n-2}$ si è indicato il vettore nullo di $\mathbb{R}^{n-2}$. Ne segue che dall'espansione di Laplace secondo la prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} \det(A_n - \lambda I_n) &= \lambda^2 \det(A_{n-2} - \lambda I_{n-2}) - \det(A_{n-2} - \lambda I_{n-2}) \\ &= (\lambda^2 - 1) \det(A_{n-2} - \lambda I_{n-2}). \end{aligned}$$

Applicando $(n-1)/2$ volte la relazione precedente ai determinanti delle matrici $A_k - \lambda I_k$, $k$ dispari, fino a $k = 1$, si ottiene:

$$\det(A_n - \lambda I_n) = (\lambda^2 - 1)^{(n-1)/2} \det(A_1 - \lambda I_1) = (\lambda^2 - 1)^{(n-1)/2}(1 - \lambda).$$

Quindi gli autovalori di $A_n$ sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $(n+1)/2$, e $\lambda_2 = -1$, con molteplicità algebrica $(n-1)/2$.

## Esercizio 4

Sapendo che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{x-1} z_k = 2 + 5 + 7 + \cdots + z_{x-1}$$

è un polinomio in $x$ di grado due, $f(x)$ è il suo polinomio di interpolazione calcolato su almeno tre valori distinti di $x$. Considerando i nodi assegnati $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, e $x_2 = 3$, nei quali $f(x)$ vale 2, 7 e 15, rispettivamente, i coefficienti di $f(x)$ sono la soluzione del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss, si ottiene la matrice aumentata finale

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{a} = [3/2, 1/2, 0]^T$, e quindi $f(x) = 3/2x^2 + 1/2x$.