Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 10 settembre 2013

Esercizio 1

(a) La matrice che rappresenta f si ottiene, per colonne, affiancando i vettori formati dai coefficienti delle rappresentazioni di $f(\mathbf{e}_i)$ rispetto alla base canonica stessa, $i = 1, 2, 3$. Si ha quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per stabilire se A è invertibile si può calcolare direttamente il determinante (con la regola di Laplace o, trattandosi di una matrice di ordine tre, con la regola di Sarrus), o ricondurre la matrice a forma triangolare superiore con il metodo di Gauss, anche in considerazione dei quesiti al punto successivo. La forma triangolare è la seguente:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dalla quale risulta $\det T = \det A = 0$. Quindi A non è invertibile, e non lo è neanche l'applicazione lineare f.

(b) Dalla forma triangolare calcolata al punto precedente si ha immediatamente $\dim S(A) = \mathrm{rk}\,(A) = 2$, $\dim N(A) = 1$, $\dim N(A)^\perp = 3 - \dim N(A) = 2$. Una base di $S(A)$ è formata dall'insieme delle colonne di A corrispondenti alle posizioni dei pivot usati nel metodo di Gauss, quindi la prima e la seconda colonna:

$$\text{base di } S(A) : \left\{ [1 \ \ -1 \ 0]^T, [0 \ 1 \ \ -1]^T \right\}.$$

Per costruire una base di $N(A)$ si considerano le infinite soluzioni del sistema lineare omogeneo $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ponendo $x_3 = \alpha$, si ha facilmente

$$\mathbf{x} = \alpha[1 \ 1 \ 1]^T,$$

quindi una base di $N(A)$ è formata dal vettore $\mathbf{e} = [1 \ 1 \ 1]^T$.

Per costruire una base di $N(A)^\perp = S(A^T)$ si riconduce A^T a forma triangolare con il metodo di Gauss, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di $N(A)^{\perp}$ è formata dalla prima e dalla seconda colonna di A^T:

$$\text{base di } N(A)^{\perp} : \left\{ [1\ 0\ -1]^T, [-1\ 1\ 0]^T \right\}.$$

(c) Per le posizioni fatte è $p(\mathbf{x}) = \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Ma $\mathbf{y} \in N(A)$, quindi $\mathbf{y} = \alpha\,\mathbf{e}$ per qualche α. Dall'uguaglianza $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}$, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per $\mathbf{e}^T$, si ottiene

$$0 = \mathbf{e}^T\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}^T\mathbf{e},$$

dalla quale si ottiene $\alpha = \mathbf{e}^T\mathbf{x}/\mathbf{e}^T\mathbf{e} = (x_1 + x_2 + x_3)/3$. Si ha infine

$$p(x) = \mathbf{x} - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\,\mathbf{e} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice B che rappresenta p rispetto alla base canonica è la seguente:

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) (*facoltativo*) È immediato verificare che

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Tale relazione tra matrici discende dalla relazione tra applicazioni:

$$f \circ p = f,$$

infatti, se $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $f(p(\mathbf{x})) = f(\mathbf{z})$, ma $f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$, ovvero $f(p(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x}$.

Esercizio 2

(a) Per verificare l'invertibilità e calcolare l'inversa, se esiste, si applica il metodo di Gauss alla matrice aumentata $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il rango è massimo, quindi A è invertibile. Con una sostituzione all'indietro per ciascuna colonna di termini noti si calcola l'inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Si ha:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (A-I)^3 = O.$$

Dunque $(A-I)^3$ ammette il solo autovalore $\mu = 0$. Ma $(A-I)^3$, essendo un polinomio in A, ha autovalori della forma $\mu = (\lambda - 1)^3$. Deve quindi valere la relazione $(\lambda - 1)^3 = 0$, e di conseguenza $\lambda = 1$, ovvero A ammette il solo autovalore $\lambda = 1$, che pertanto ha molteplicità algebrica 3.

Esercizio 3

È necessario studiare, al variare di k, autovalori e autovettori di A_k. Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(\lambda) = \det(A_k - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -k & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (3-k)\lambda + 2 - k.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica $p(\lambda) = 0$ si ottengono gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 - k$. Per $k \neq 1$ gli autovalori sono distinti, quindi la matrice A_k è diagonalizzabile. Resta da esaminare il caso $k = 1$, in cui A_1 ammette il solo autovalore 1:

$$A_1 - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che $\dim N(A_1 - I) = 1$, quindi non esistono due autovettori linearmente indipendenti. Si conclude che l'unico valore di k per il quale k non è diagonalizzabile è $k = 1$.
Supponiamo ora che A_k sia diagonalizzabile, ovvero $k \neq 1$. Dall'esame delle matrici

$$A_k - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -k & -k \end{bmatrix}, \quad A_k - (2-k)I = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix},$$

si ottengono due autovettori, necessariamente linearmente indipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ relativo a } 1, \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix}, \text{ relativo a } 2-k.$$

La matrice S_k di una trasformazione che diagonalizza A_k è quindi

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

Il vettore dei coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo due $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^T V | V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Conviene dividere per 2 la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti, poi con il metodo di Gauss si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{6}{11} \end{array}\right].$$

Sostituendo all'indietro si ha $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_1 = -\frac{1}{5}$, $a_0 = 0$. Il polinomio è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}.$$