Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare dell'11 settembre 2015

Esercizio 1

(a) Applicando il metodo di Gauss alla matrice A si ottiene facilmente la forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si hanno i valori delle dimensioni dei sottospazi: $\dim S(A) = 2$, $\dim N(A) = 2$, $\dim N(A)^{\perp} = 2$. Per $S(A)$ si può scegliere come base l'insieme formato dalla prima e dalla terza colonna di A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dalla forma triangolare si ottiene la seguente rappresentazione dei vettori di $N(A)$:

$$\begin{bmatrix} -3\alpha + 2\beta \\ \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix},$$

quindi una base è il sottoinsieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tenendo conto della relazione $N(A)^{\perp} = S(A^T)$, se si riporta A^T a forma triangolare con il metodo di Gauss si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui ha che una base di $N(A)^{\perp}$ è il sottoinsieme formato dalla prima e dalla seconda colonna di A^T:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) (*facoltativo*) Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ i vettori della base di $N(A)^\perp$ ottenuta al punto (a), ovvero

$$\boldsymbol{v}_1^T = [1,\ -2,\ 1,\ 4\,], \quad \boldsymbol{v}_2^T = [2,\ -4,\ 0,\ 6\,],$$

e $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ i vettori della base di $S(A)$ ottenuta al punto (a), ovvero

$$\boldsymbol{z}_1^T = [1,\ 2,\ -1\,], \quad \boldsymbol{z}_2^T = [1,\ 0,\ 1\,],$$

La matrice B richiesta è 2×2, e i suoi elementi b_{ij} si ottengono risolvendo i due sistemi lineari:

$$[\boldsymbol{z}_1|\boldsymbol{z}_2] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{v}_1, \quad [\boldsymbol{z}_1|\boldsymbol{z}_2] \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{v}_2,$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 34 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 56 \\ -22 \end{bmatrix}.$$

La matrice B è dunque la seguente:

$$B = \begin{bmatrix} 17 & 28 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che B è necessariamente invertibile perché rappresenta l'applicazione g, che è invertibile: infatti se $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, allora $\boldsymbol{x} \in N(A) \cap N(A)^\perp$, e quindi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Esercizio 2

(a) Il determinante può essere calcolato usando l'espansione di Laplace, con regola di Sarrus (trattandosi di una matrice 3×3) o usando il metodo di Gauss. Con l'espansione di Laplace applicata alla prima colonna si ottiene

$$\det A = k(k^2) + (1-k) = k^3 - k + 1.$$

(b) Per $k = 1$ $\det A = 1$, pertanto la matrice è invertibile. Applicando il metodo di Gauss-Jordan si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

da cui risulta

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Poiché

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

si verifica che

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Esercizio 3

È

$$V = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Per studiare la diagonalizzabilità di V occorre controllare le molteplicità dei suoi autovalori, che sono gli zeri del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 - (x_0 + 1)\lambda + x_0 - x_1$, ovvero

$$\lambda_1 = \frac{1 + x_0 - \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 4x_1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + x_0 + \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 4x_1}}{2}.$$

Perché V sia non diagonalizzabile è necessario che sia $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = (1 + x_0)/2$, e quindi che sia

$$x_1 = -\frac{(x_0 - 1)^2}{4}.$$

In tal caso V è non diagonalizzabile soltanto se la molteplicità geometrica $\tau(\lambda) = \operatorname{rank}(V - \lambda I)$ dell'unico autovalore è uno, cioè se

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} x_0 - (1 + x_1)/2 & 1 \\ x_1 & 1 - (1 + x_1)/2 \end{bmatrix} = 1.$$

Ma il rango della matrice in questione non può valere due, essendo singolare, né zero, essendo non nulla, quindi è necessariamente uno. Quindi V è non diagonalizzabile se e solo se vale la relazione $x_1 = -(x_0 - 1)^2/4$. Una scelta dei nodi per la quale V è non diagonalizzabile è $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

(b) Per $x_0 = x_1 = 1$ la matrice V è diagonalizzabile perché è simmetrica, e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Con facili calcoli si ha che due autovettori relativi a λ_1 e λ_2 sono $[\,1,\ -1\,]^T$ e $[\,1,\ 1\,]^T$ rispettivamente, pertanto S può essere scelta come

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

I valori di $f(x) = \cos 2\pi x$ nei nodi sono $f(-1/2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1/4) = 0$.

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V|\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{a} = [-32/3,\ -4/3,\ 1]^T$, e quindi $p(x) = -\frac{32}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.

(b) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno $q(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{b}$ del sistema $W^TW\boldsymbol{b} = W^T\boldsymbol{f}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[W^TW|W^T\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 3 & 0 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\boldsymbol{b} = [12/7,\ 1/7]^T$, e quindi $q(x) = \frac{12}{7}x + \frac{1}{7}$.