Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 6 settembre 2016

Esercizio 1

(a) V è un sottospazio di matrici perché è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Infatti se X e Y commutano con A anche $X+Y$ commuta con A: $A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A$. Se X commuta con A anche αX commuta con A: $A\alpha X = \alpha XA$. Per studiare la dimensione di V si osservi che se si definisce il vettore $\boldsymbol{z}$

$$\boldsymbol{z}^T = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}],$$

dove x_{ij} è il generico elemento di X, dalla relazione di commutatività si ottiene il sistema lineare $B\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, dove

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\boldsymbol{z}$ appartiene al nucleo di B. Con il metodo di Gauss (di fatto solo con degli scambi di righe) la matrice B viene ricondotta alla forma triangolare:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi $\dim N(B) = 4 - \text{rk } B = 2$, e i vettori del nucleo hanno la forma $\boldsymbol{z}^T = [\beta - \alpha, 0, \alpha, \beta]$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Come base si può scegliere l'insieme formato dai due vettori $[-1, 0, 1, 0]$ e $[1, 0, 0, 1]$. Corrispondentemente si ha la base di V formata dalle due matrici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) L'insieme S delle matrici simmetriche 2×2 è un sottospazio, quindi $W = S \cap V$ è un sottospazio, in quanto intersezione di sottospazi. Dallo studio di V svolto al punto precedente si ottiene che W è formato dalle matrici corrispondenti ai vettori $\boldsymbol{z}^T = [\beta, 0, 0, \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$, ovvero dalle matrici della forma βI. Quindi W ha dimensione uno e una base è formata dalla matrice identica.

(c) Ovvio, perché W è il sottospazio delle matrici βI (matrici scalari).

Esercizio 2

Si osservi che, posto $\boldsymbol{u}^T = [u_1, u_2]$, $\boldsymbol{v}^T = [v_1, v_2]$, la matrice A risulta della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_1v_2 - v_1u_2 \\ v_1u_2 - u_1v_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) A è non singolare se e solo se $\det A \neq 0$. Poiché $\det A = -(u_1v_2 - v_1u_2)^2 = -(\det B)^2$, dove

$$B = [\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}],$$

si conclude che A è non singolare se e solo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono linearmente indipendenti.

(b) Basta osservare che $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 0$, ne segue $\lambda_2 = -\lambda_1$.

(c) Per i vettori assegnati si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 1$. Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = \boldsymbol{i}$ e $\lambda_2 = -\boldsymbol{i}$, e i corrispondenti autovettori $\boldsymbol{x}_1^T = [-\boldsymbol{i}, 1]$, $\boldsymbol{x}_2^T = [\boldsymbol{i}, 1]$, rispettivamente. Gli autovalori di A^T sono gli stessi di A, $\lambda_1 = \boldsymbol{i}$ e $\lambda_2 = -\boldsymbol{i}$, e i corrispondenti autovettori $\boldsymbol{y}_1^T = [\boldsymbol{i}, 1]$, $\boldsymbol{y}_2^T = [-\boldsymbol{i}, 1]$, rispettivamente.

Esercizio 3

(a) Espandendo il determinante con la regola di Laplace rispetto all'ultima colonna si ha:

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

quindi A è invertibile per qualunque valore di α.

(b) Sia $\alpha = 1$. Si può usare il metodo di Gauss, ma per la matrice simmetrica assegnata è altrettanto rapido calcolare l'aggiunta, tenendo conto che anch'essa è simmetrica. Posto $B = \operatorname{adj}(A)$, si ha:

$$b_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \quad b_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$b_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \quad b_{44} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$b_{21} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad b_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$b_{43} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad b_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$b_{42} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \quad b_{41} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Poiché $\det A = 1$, si ha

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

(a) Affinché i nodi siano distinti si richiede che sia $\alpha \neq 0$. Si ha $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = \alpha^4$, $f(x_3) = \alpha^4$. I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha^4 \\ \alpha^4 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V|\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \alpha^4 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 & \alpha^4 \end{array}\right],$$

e con il metodo di Gauss viene ridotta alla forma seguente

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha - \alpha^3 & 1 - \alpha^2 & -\alpha^2 + \alpha^4 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha^2 & 2\alpha^4 \end{array}\right],$$

da cui si ottiene $\boldsymbol{a} = [\,0,\ 1+\alpha^2,\ 0,\ -\alpha^2\,]^T$, e quindi

$$p(x) = (1+\alpha^2)x^2 - \alpha^2.$$

(b) (*facoltativo*) Si tratta di tener conto della proprietà che caratterizza $q(x)$, cioè il fatto di rendere minima la lunghezza del vettore dei residui, sullo spazio $\mathcal{S}$ dei polinomi di grado massimo tre:

$$\sum_{i=0}^{4}(f(x_i) - q(x_i))^2 = \min_{s\in\mathcal{S}} \sum_{i=0}^{4}(f(x_i) - s(x_i))^2$$

$$\leq \sum_{i=0}^{4}(f(x_i) - p(x_i))^2 = (f(x_4) - p(x_4))^2 = (0+\alpha^2)^2 = \alpha^4.$$