Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 16 aprile 2015

Esercizio 1

(a) Si applica il metodo di Gauss alla matrice A ottenendo le seguenti matrici:

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & 2\alpha \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 1-3\alpha \end{bmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-4\alpha \end{bmatrix}.$$

Il solo valore per cui il rango di A è minore di 4 è dunque $\alpha = 1/2$. Allo stesso risultato si arriverebbe calcolando direttamente il determinante con la regola di Laplace: $\det A = 4\alpha - 2$.

(b) Sia $\alpha = 1/2$. Dalla struttura di $A^{(4)}$ si ha che $\dim S(A) = 3$, e che una base di $S(A)$ è l'insieme formato dalle prime tre colonne di A:

$$\left\{ [1,\ 1,\ 1,\ 1/2]^T, [1,\ 1,\ 2,\ 1]^T, [2,\ 1,\ 1,\ 0]^T \right\}.$$

Poiché $S(A)^\perp = N(A^T)$, applicando il metodo di Gauss alla matrice A^T si ottiene facilmente la forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ha che $N(A^T)$ è generato dal vettore $\boldsymbol{y} = [1,\ -1,\ -1,\ 2]^T$.

(c) Essendo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, con $\boldsymbol{v} \in S(A)^\perp$, si può porre $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{y}$. Poi, moltiplicando a sinistra per $\boldsymbol{y}^T$ entrambi i membri dell'uguaglianza $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + k\boldsymbol{y}$ e tenendo conto del fatto che $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{u}$ sono ortogonali, si ha $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{z} = k\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$, ovvero $1 = 7k$, da cui $k = 1/7$.

In conclusione $\boldsymbol{v} = 1/7\boldsymbol{y} = 1/7[1,\ -1,\ -1,\ 2]^T$, e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{v} = 1/7[6,\ 8,\ 8,\ 5]^T$.

Esercizio 2

(a) V è un sottospazio vettoriale perché è il nucleo della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\dim N(A) = 3 - \operatorname{rank} A = 2$, una base di $N(A)$ è formata da due vettori linermente indipendenti della forma

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ad esempio $\boldsymbol{v}_1 = [\,-1,\ 1,\ 0\,]^T$, e $\boldsymbol{v}_2 = [\,-1,\ 0,\ 1\,]^T$. Con il procedimento di Gram-Schmidt si ottengono i vettori seguenti:

$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{t}_1^T\boldsymbol{t}_1}}\boldsymbol{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,-1,\ 1,\ 0\,]^T,$$

$$\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{y}_1 = [\,-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\,]^T,\ \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{t}_2^T\boldsymbol{t}_2}}\boldsymbol{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}[\,-1,\ -1,\ 2\,]^T.$$

Una base ortonormale di V è $\{\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2\}$.

(b) Si è già osservato che V è il nucleo di A che però è una matrice 1×3: basta aggiungere ad A due righe nulle e si ottiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è la scelta più semplice. Altre matrici aventi V come nucleo hanno la forma PB, dove P è una generica matrice quadrata di ordine 3, invertibile: in questo modo si avrà $N(PB) = N(B)$, e la matrici così ottenute sono tutte le matrici non nulle con tutte le colonne uguali.

Esercizio 3

(a) Per calcolare il polinomio caratteristico di A si può applicare la regola di Laplace all'ultima riga della matrice $A - \lambda I$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 1 - \lambda(-3\lambda + \lambda^2 + 3)$$

$$= (-\lambda + 1)^3.$$

A ammette autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica tre. A è diagonalizzabile se e solo se λ ha molteplicità geometrica tre. Ma se si triangolarizza con il metodo di Gauss la matrice $A - I$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi la molteplicità geometrica di λ è $3 - \operatorname{rank} A = 1$. A non è diagonalizzabile.

(b)

$$(A-I)^3 = (A-I)^2\, A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) (*facoltativo*) Espandendo $(A - I)^3$, dal punto precedente si ottiene

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = O,$$

e, moltiplicanodo entrambi i membri per A^{-1} (A è invertibile):

$$A^2 - 3A + 3I - A^{-1} = O,$$

da cui

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V^T V \boldsymbol{a} = V^T \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix},$$

quindi

$$V^T V = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad V^T \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i f(x_i) \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{bmatrix}.$$

Nelle ipotesi fatte è $\sum_{i=0}^n x_i = 0$ e $\sum_{i=0}^n f(x_i) = 0$, pertanto

$$V^T V = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix}, \quad V^T \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i f(x_i) \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^n x_i f(x_i)}{\sum_{i=0}^n x_i^2}, \quad a_1 = 0.$$

(b) I nodi e la funzione assegnati soddisfano le condizioni del punto (a), quindi si ha immediatamente

$$a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{10}, \quad a_1 = 0.$$