Capitolo 3

DETERMINANTE

Il problema di stabilire se un insieme di vettori è linearmente indipendente (ad esempio se lo sono le colonne di una matrice quadrata, e quindi se la matrice è invertibile) non è facile da risolvere in generale. Uno strumento che la teoria fornisce per affrontare questo problema è la funzione *determinante*.

Il determinante di una matrice quadrata può essere introdotto in vari modi. Qui si preferisce definirlo in modo assiomatico: dalla definizione si ricaveranno alcune importanti proprietà e successivamente si spiegherà come calcolarlo.

3.1 Definizione assiomatica di determinante.

Una funzione $\det : \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$ si chiama *determinante* se per ogni $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ verifica le seguenti condizioni:

(a) $\det A$ è una funzione lineare nelle colonne di A,

(b) $\det A = 0$ se due colonne di A sono uguali,

(c) $\det I = 1$.

In realtà, visto che la funzione det deve essere lineare nelle colonne di A, sarebbe meglio scrivere $\det\,[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$, dove con $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ si sono indicate le colonne di A. Allora la condizione (a) significa che

$$\det\,[\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] = \alpha \det\,[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] + \beta \det\,[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

e così via per tutte le colonne.

Una prima proprietà importante ci dice quello che accade quando si fanno delle permutazioni di colonne di A.

3.2 Teorema.

Se si scambiano due colonne di A il determinante cambia segno.

Dim. Per semplicità di dimostrazione si suppone che le colonne scambiate siano le prime due $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Dalla linearità del determinante segue che

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n] &= \det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]+\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n]\\ &\quad+\det[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]+\det[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n].\end{aligned}$$

La matrice al primo membro e la prima e l'ultima al secondo membro hanno le prime due colonne uguali, quindi i loro determinanti sono nulli. Ne segue che

$$\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n] = -\det[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$$ ■

3.3 Unicità del determinante.

Per dimostrare che le proprietà (a), (b) e (c) della definizione 3.1 determinano in modo univoco la funzione determinante, se ne cerca una espressione esplicita in termini degli elementi della matrice A. Occorre prima definire le permutazioni di n numeri interi e il loro segno.

Si dicono *permutazioni* dell'insieme $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ le applicazioni invertibili (o corrispondenze biunivoche) di G in se stesso. Nel seguito una permutazione σ verrà spesso identificata con la n-upla ordinata dei suoi valori $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. È noto che le permutazioni possibili di G sono $n!$, e che ogni permutazione può essere espressa come composizione di un numero finito di *scambi*, cioè di particolari permutazioni che consistono nello scambio di una sola coppia di elementi di G. Alla permutazione σ assegniamo il segno $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ se gli scambi in cui può essere decomposta sono in numero pari, il segno $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ se tali scambi sono in numero dispari. Ad esempio, per $n = 4$, la permutazione $\{4, 1, 3, 2\}$ può essere ottenuta effettuando, nell'ordine, gli scambi $\{4, 2, 3, 1\}$ e $\{1, 4, 3, 2\}$. Quindi alla permutazione si dà il segno 1. La stessa permutazione può essere ottenuta anche con scambi diversi da quelli considerati, ma il numero risulta sempre pari.

Per esprimere il $\det A$, si scrive la j-esima colonna di A in termini dei vettori della base canonica

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i,$$

e per la linearità

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n] &= \det\Big[\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\mathbf{e}_{i_n}\Big]\\ &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\ldots a_{i_n,n}\det[\mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},\ldots,\mathbf{e}_{i_n}].\end{aligned}$$

Gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ della somma assumono tutti i valori da 1 a n, per cui in molti casi vi sono indici ripetuti. Se vi sono indici ripetuti allora

$$\det\,[\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}] = 0,$$

mentre se gli indici sono tutti diversi, allora $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ è la permutazione σ dei primi n interi definita come $\sigma(j) = i_j$, e quindi per il teorema 3.2

$$\det\,[\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}] = \det\,[\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}]$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \det\,[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n] = \operatorname{sgn}(\sigma) \det I = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Quindi risulta

$$\det A = \det\,[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma)\; a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}, \tag{1}$$

dove S è l'insieme di tutte le possibile permutazioni dei primi n interi. Perciò il numero di termini della somma è $n!$.

Dalla (1) segue l'unicità del determinante.

3.4 Osservazione.

Data una funzione $g\,:\,\mathbf{R}^{n\times n} \;\to\; \mathbf{R}$ che soddisfa le proprietà (a) e (b) della definizione 3.1 di determinante, si ha, per quanto detto in 3.3,

$$g(A) = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma)\; a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}\; g(I).$$

Quindi se il determinante esiste, per una tale funzione si deve avere

$$g(A) = \det A\; g(I).$$

3.5 Esistenza del determinante.

Per dimostrare l'esistenza del determinante, basta far vedere che la funzione definita in (1) soddisfa le condizioni della definizione 3.1. Per verificare che (a) vale, notiamo che ogni termine della somma (1) contiene un solo elemento di ogni colonna e quindi la somma è lineare nelle colonne di A. Per verificare che (b) vale, supponiamo che la matrice A abbia due colonne uguali. Supponiamo per semplicità che siano le prime due. Nella somma, per ogni addendo

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

c'è anche l'addendo

$$-\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(2),1}a_{\sigma(1),2}a_{\sigma(3),3}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Ma $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} = a_{\sigma(2),1}a_{\sigma(1),2}$, e i due termini della somma si elidono. Quindi la somma risulta nulla. Per verificare che (c) vale, notiamo che nella matrice identica l'unico addendo non nullo è $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 1$.

3.6 Calcolo del determinante quando $n = 2$ e $n = 3$.

Vediamo adesso in pratica come si può calcolare il determinante di una matrice di ordine n.

Per $n = 2$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vi sono due possibili permutazioni degli interi $1, 2$, per cui la somma della (1) è formata da due termini:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

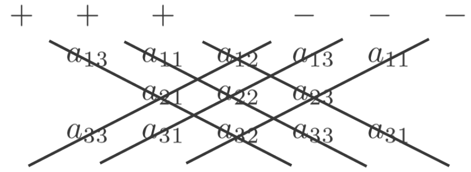
Per $n = 3$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Le permutazioni degli interi $1, 2, 3$ sono 6, per cui la somma della (1) è formata da 6 termini:

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Un modo mnemonico per ricostruire questa formula senza sbagliare il segno degli addendi è quello di riscrivere a sinistra della matrice gli elementi della terza colonna e a destra gli elementi della prima colonna, prendendo con il segno + i prodotti degli elementi posti sulle diagonali parallele alla diagonale principale e con il segno − i prodotti degli elementi posti sulle diagonali parallele alla diagonale secondaria, nel modo seguente:



3.7 Alcune proprietà utili del determinante.

Se A è una matrice diagonale o triangolare, dalla (1) segue direttamente che

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Se invece A non ha una struttura così particolare, il calcolo del determinante attraverso la formula (1) diventa sempre più complicato con il crescere di n, per cui si presenta la necessità di individuare altre formule per il determinante. Le seguenti proprietà, che consentono di ricondurre il calcolo del determinante di una matrice a quello di una matrice di forma più semplice, discendono direttamente dalla linearità:

a) se si moltiplicano per una stessa costante α tutti gli elementi di una colonna di A, il determinante risulta moltiplicato per α;

b) se ad una colonna si aggiunge una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia.

Per esempio, per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

conviene trasformare prima la matrice utilizzando la proprietà b). Si aggiunge alla prima colonna la terza cambiata di segno e si ottiene la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

poi si aggiunge alla seconda colonna la terza moltiplicata per 2 e si ottiene

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tutte le operazioni fatte hanno lasciato invariato il determinante, quindi si ha $\det A = \det C$. Adesso scambiamo le ultime due colonne di C, ottenendo

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima operazione provoca un cambiamento di segno del determinante, per cui $\det A = -\det D$. Adesso possiamo calcolare direttamente il determinante di D che è triangolare superiore, moltiplicandone gli elementi principali, per cui si ottiene

$$\det A = -6.$$

3.8 Teorema.

$$\det A^T = \det A.$$

Dim. Indichiamo con $B = A^T$. Nella (1) compaiono termini della forma

$$t_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)\; a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

in cui σ è una permutazione degli interi $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si può allora considerare la permutazione inversa $\tau = \sigma^{-1}$ così da poter scrivere $a_{\sigma(j),j} = a_{\sigma(j),\tau(\sigma(j))} = b_{\tau(\sigma(j)),\sigma(j)}$ ed è

$$t_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)\; b_{\tau(\sigma(1)),\sigma(1)} b_{\tau(\sigma(2)),\sigma(2)} \cdots b_{\tau(\sigma(n)),\sigma(n)}.$$

Poiché σ è una permutazione degli interi, si possono riordinare i fattori di t_σ in modo che gli indici di colonna siano nell'ordine naturale degli interi. Inoltre è facile verificare che $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Al variare di σ nell'insieme di tutte le permutazioni S, anche τ varia nell'insieme S e quindi i termini che si sommano nel calcolo di $\det B$ sono gli stessi che si sommano nel calcolo di $\det A$ anche se in ordine diverso. ■

Da questo teorema segue che qualunque proprietà del determinante che riguardi le colonne di una matrice ha un'equivalente per le righe e viceversa.

3.9 Teorema di Binet.

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Dim. Consideriamo la funzione

$$f(B) = \det(AB).$$

Indicate con $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ le colonne della matrice B, le colonne della matrice AB sono $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2 \ldots, A\mathbf{b}_n$, per cui si ha

$$f(B) = \det\,[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2 \ldots, A\mathbf{b}_n].$$

La funzione $f(B)$ verifica le condizioni (a) e (b) della definizione 3.1 riferita alla matrice B: è infatti lineare nelle colonne di B, si annulla se due colonne di B sono uguali, ed inoltre $f(I) = \det(AI) = \det A$. Quindi per l'osservazione 3.4 è $f(B) = \det A \det B$, da cui segue la tesi. ∎

Dal teorema di Binet segue che

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3.10 Regola di Laplace.

Ogni termine della somma (1) contiene un solo elemento della prima riga: degli $n!$ termini $(n-1)!$ contengono a_{11}, $(n-1)!$ contengono a_{12}, ..., $(n-1)!$ contengono a_{1n}. Possiamo perciò raccogliere in $\det A$ tutti i termini che contengono a_{11}, quelli che contengono a_{12}, e così via, ottenendo un'espressione della forma

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}.$$

In modo del tutto analogo possiamo raccogliere in $\det A$ i termini corrispondenti agli elementi di una generica riga i

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}. \tag{2}$$

c_{ij} è chiamato il *cofattore* di a_{ij}.

Vediamo adesso come si possono esprimere i cofattori. Consideriamo c_{11}. Da (1) risulta che

$$c_{11} = \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

dove S_1 è l'insieme delle permutazioni dell'insieme di interi $\{2, 3, \cdots, n\}$. Questa espressione è anche uguale a quella del determinante della sottomatrice di ordine $n-1$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ottenuta cancellando dalla matrice A la prima riga e la prima colonna.

Per gli altri cofattori c_{ij} si procede in modo analogo, ma prima è opportuno fare sulla matrice A degli scambi di righe e di colonne in modo da portare la i-esima riga al posto della prima e la j-esima colonna al posto della prima. Cioè la matrice B che si ottiene ha le righe di A nell'ordine $i, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ ($i-1$ scambi) e le colonne nell'ordine $j, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ ($j-1$ scambi) e il suo determinante risulta uguale a quello di A moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. Il cofattore c_{ij} in (2) risulta ora il cofattore dell'elemento con indici $(1,1)$ di B e quindi uguale al determinante della sottomatrice di B ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna. Ma questa sottomatrice coincide con quella che si ottiene cancellando da A la i-esima riga e la j-esima colonna e che indichiamo con A_{ij}.

Sostituendo in (12) si ottiene la relazione

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \textit{regola di Laplace.}$$

Poiché $\det A = \det A^T$, la regola di Laplace può essere applicata anche sommando rispetto all'indice j anziché all'indice i, cioè sviluppando il determinante rispetto ad una colonna anziché ad una riga.

Per esempio, per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

conviene applicare la regola di Laplace alla terza riga della matrice, che contiene un solo elemento diverso da 0. Si ha

$$\det A = -4 \det A_{34}, \quad \text{dove} \quad A_{34} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La sottomatrice A_{34} ha ordine 3 e il suo determinante può essere calcolato direttamente o utilizzando ancora la regola di Laplace applicata alla terza colonna.

3.11 Matrice aggiunta.

Indicata con C la matrice dei cofattori, la matrice $\mathrm{adj}A = C^T$ è detta *matrice aggiunta* di A. Il suo (i,j)-esimo elemento è quindi uguale a

$$c_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Costruiamo la matrice prodotto $P = A\ \mathrm{adj}A$. Il primo elemento è dato da

$$p_{11} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} = \det A.$$

In modo analogo si vede che tutti gli elementi principali di P sono uguali a $det(A)$. Invece gli elementi non principali di P sono uguali a 0. Infatti si ha, ad esempio

$$p_{21} = a_{21} \det A_{11} - a_{22} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{2n} \det A_{1n},$$

che è uguale ad determinante di una matrice ottenuta dalla A sostituendo la prima riga con la seconda. Ma questa matrice ha la prima riga uguale alla seconda, e quindi il suo determinante è nullo.

Abbiamo così dimostrato che

$$P = A\ \mathrm{adj}A = (\det A)\ I.$$

Perciò, se $\det A \neq 0$, la matrice

$$B = \frac{1}{\det A}\ \mathrm{adj}A \tag{3}$$

è tale che $AB = I$. Procedendo in modo analogo si verifica che $BA = I$. Ne segue che $B = A^{-1}$. Dalla (3) risulta che A^{-1} esiste se e solo se $\det A \neq 0$.

Una matrice il cui determinante è nullo viene detta *singolare*. Vale perciò il seguente teorema.

3.12 Teorema.

Una matrice A è invertibile se e solo se non è singolare. ■

Dai teoremi 2.14 e 2.16 segue allora che $\det A \neq 0$ se e solo se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, cioè se e solo se tutte le colonne (e le righe) di A sono linearmente indipendenti.

3.13 Sistemi lineari.

Data una matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e un vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, si chiama *sistema lineare* un sistema di n equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4}$$

dove $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ è detto vettore delle *incognite*.

Risolvere un sistema lineare significa calcolare, se esiste, un vettore $\mathbf{x}$ che soddisfa le (4). La matrice A si dice *matrice dei coefficienti*, il vettore $\mathbf{b}$ *vettore dei termini noti*, la matrice $[A|\mathbf{b}]$, ottenuta affiancando alla matrice A la colonna $\mathbf{b}$, si dice *matrice aumentata*. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ il sistema si dice *omogeneo*. Il sistema si dice *consistente* se ha almeno una soluzione.

3.14 Teorema.

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) *il sistema (4) è consistente*,

(b) $\mathbf{b} \in S(A)$,

(c) *la matrice A e la matrice aumentata hanno lo stesso rango.* (Teorema di Rouchè-Capelli) ■

Dim. L'equivalenza di (a) e (b) discende direttamente dalle definizioni di immagine di una matrice e di consistenza di un sistema lineare. Dimostriamo che $(a) \Rightarrow (c)$: sia $\mathbf{x}$ soluzione del sistema, allora $\mathbf{b}$ risulta uguale ad una combinazione lineare di colonne di A con coefficienti uguali a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Quindi affiancare alle colonne di A un'altra colonna linearmente dipendente da esse non altera il rango. Dimostriamo che $(c) \Rightarrow (a)$. Posto $r = \text{rk}(A)$, supponiamo che le colonne di A linearmente indipendenti siano le prime r. Quindi $\mathbf{b}$ è una combinazione lineare delle prime r colonne di A con coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_r$. È ovvio che $\mathbf{b}$ risulta combinazione lineare di tutte le colonne di A con coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0$. ■

Se il sistema è omogeneo, la matrice dei coefficienti e la matrice aumentata hanno ovviamente lo stesso rango e il sistema è consistente. Le soluzioni sono tutti i vettori di $N(A)$.

Se il sistema non è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una sua soluzione, allora ogni altra soluzione può essere espressa come $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, dove $\mathbf{y}$ appartiene a $N(A)$. Perciò la soluzione è unica se e solo se $\dim N(A) = 0$, ovvero se $\text{rk}(A) = n$.

Se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ la matrice A è non singolare, allora esiste l'inversa e la soluzione è

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

3.15 Regola di Cramer.

Mediante la *regola di Cramer* la soluzione può essere espressa in modo esplicito

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo alla i-esima colonna il vettore $\mathbf{b}$. Infatti sia E_i la matrice che si ottiene dalla matrice I sostituendo alla i-esima colonna il vettore $\mathbf{x}$. Per ogni i si considera la matrice

$$A\,E_i = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n] = A_i.$$

Per il teorema di Binet, poiché $\det E_i = x_i$, si ha

$$\det(AE_i) = \det A\; x_i = \det A_i,$$

da cui segue la (5) in quanto $\det A \neq 0$.

3.16 Riduzione a forma a scalini (Metodo di Gauss).

La teoria finora svolta, se applicata alla risoluzione di un sistema lineare, richiederebbe la determinazione di ranghi (teorema di Rouchè-Capelli), il calcolo di determinanti (regola di Cramer), e lo studio dei sottospazi di $\mathbf{R}^n$ formati dalle soluzioni dei sistemi omogenei, quando sono infinite. La mole di calcolo che tutto questo comporterebbe può essere notevolmente ridotta se il sistema lineare assegnato viene sostituito da un altro *equivalente*, avente cioè tutte e sole le sue soluzioni, ma di forma più semplice. Questo può essere fatto applicando al sistema le seguenti operazioni (*operazioni elementari di riga*) che non alterano l'insieme delle soluzioni:

– sommare ad una equazione il multiplo di un'altra (o, in termini di matrice aumentata, sommare ad una riga un multiplo di un'altra);
– scambiare due equazioni (scambiare due righe).

Le operazioni elementari di riga non alterano il rango e il valore assoluto del determinante. Il determinante cambia segno solo nel caso di un numero dispari di scambi.

1o passo. Se $a_{11} \neq 0$, sia $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$, $i = 2, \ldots, n$; si aggiungono alle righe $2, \ldots, n$ della matrice aumentata opportuni multipli della prima riga, ottenendo così gli elementi della matrice aumentata del sistema equivalente $A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1,$$

$i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Tutto questo equivale a ricavare l'incognita x_1 dalla prima equazione e a sostituirla nelle sequenti. Se $a_{11} = 0$ sia $s > 1$ un indice per cui $a_{s1} \neq 0$ (certamente s esiste altrimenti x_1 non comparirebbe in nessuna equazione): si scambiano allora le righe 1 e s della matrice aumentata e si procede come sopra. Si ponga inoltre, ai fini della descrizione dei passi successivi, $j_1 = 1$.

Passo k, $2 \le k \le n-1$. Sia $j_k = j_{k-1} + 1$. Se $j_k > n$ il procedimento termina. Altrimenti, se $a^{(k)}_{k,j_k} \neq 0$, sia $m_{ik} = a^{(k)}_{i,j_k}/a^{(k)}_{k,j_k}$, $i = k+1,\dots,n$; si aggiungono alle righe $k+1,\dots,n$ della matrice aumentata opportuni multipli della riga k, ottenendo così gli elementi della matrice aumentata del sistema equivalente $A^{(k+1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k+1)}$:

$$a^{(k+1)}_{ij} = a^{(k)}_{ij} - m_{ik}a^{(k)}_{kj}, \quad b^{(k+1)}_i = b_i - m_{ik}b_k,$$

$i = k+1,\dots,n$, $j = j_k,\dots,n$. Se $a^{(k)}_{k,j_k} = 0$, ma esiste un indice $s > k$ per cui $a^{(k)}_{s,j_k} \neq 0$ si scambiano le righe k e s della matrice aumentata per poi procedere come sopra. Infine, se $a^{(k)}_{s,j_k} = 0$ per ogni $s > k$, si pone $j_k = j_{k-1} + 2$ e si procede come sopra.

Al termine del procedimento, dopo al più $n-1$ passi, si ottiene il sistema $A^{(r+1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(r+1)}$, $r \le n-1$, la cui matrice dei coefficienti è triangolare superiore.

Distinguiamo due casi, a seconda che la matrice triangolare ottenuta abbia o meno righe tutte nulle.

Primo caso. Tutte le righe sono non nulle, quindi è necessariamente $r = n-1$ e

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a^{(n)}_{11} & a^{(n)}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a^{(n)}_{1n} \\ & a^{(n)}_{22} & a^{(n)}_{23} & \cdots & \cdots & a^{(n)}_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \bigcirc & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & a^{(n)}_{nn} \end{bmatrix},$$

con gli elementi diagonali $a^{(n)}_{kk} \neq 0$. Tutte le colonne (e le righe) di $A^{(n)}$ sono linearmente indipendenti, quindi $n = \mathrm{rk}(A^{(n)}) = \mathrm{rk}(A)$, e il sistema è consistente, qualunque sia il termine noto.

Inoltre, detto s il numero di scambi di righe effettuati, è $\det(A) = (-1)^s \det(A^{(n)}) = (-1)^s \prod_{k=1}^n a^{(n)}_{kk} \neq 0$.

La soluzione è unica ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nel caso omogeneo) e può essere calcolata risolvendo il sistema $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$ per *sostituzione all'indietro*. Infatti, essendo $A^{(n)}$ triangolare superiore e non singolare, si ottiene

$$x_n = \frac{1}{a^{(n)}_{nn}} b^{(n)}_n,$$

$$x_i = \frac{1}{a^{(n)}_{ii}}(b^{(n)}_i - \sum_{j=i+1}^{n} a^{(n)}_{ij} x_j), \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Secondo caso. Le righe di indici $r+1,\dots,n$ sono nulle, e la matrice triangolare ha la forma

$$A^{(r+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r+1)} & a_{12}^{(r+1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(r+1)} \\ & & a_{2,j_2}^{(r+1)} & a_{2,j_2+1}^{(r+1)} & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(r+1)} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{r,j_r}^{(r+1)} & a_{r,j_r+1}^{(r+1)} & \dots & a_{rn}^{(r+1)} \\ & & & & & & & \\ & & & & \bigcirc & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

con $a_{k,j_k}^{(r+1)} \neq 0$, per $k \leq r$, detta *forma a scalini*.

Osserviamo che le colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$ della forma a scalini sono linearmente indipendenti e quindi $r = \mathrm{rk}(A^{(r+1)}) = \mathrm{rk}(A)$. Ovviamente $\det(A) = \det(A^{(r+1)}) = 0$.

Se $b_i^{(r+1)} \neq 0$ per qualche indice $i > r$, allora $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A^{(r+1)}|b^{(r+1)}) > r$, e dal teorema 3.14 (c) segue che il sistema non è consistente.

Se invece $b_i^{(r+1)} = 0$ per ogni $i > r$, allora il sistema è consistente (questo accade necessariamente nel caso omogeneo). Le soluzioni sono infinite, e si possono esprimere nel modo seguente. Chiamiamo A' la sottomatrice quadrata di odine r di $A^{(r+1)}$ formata dalle righe $1, 2, \dots, r$ e dalle colonne $j_1, j_2, \dots, j_r$, chiamiamo A'' la sottomatrice formata dalle stesse righe e dalle restanti colonne; analogamente, poniamo $\mathbf{x}' = [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r},]^T$, $\mathbf{b}' = [b_1^{(r+1)}, b_2^{(r+1)}, \dots, b_r^{(r+1)}]^T$ e $\mathbf{x}''$ il vettore formato dalle altre $n-r$ componenti di $\mathbf{x}$. Da $A^{(r+1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(r+1)}$ segue

$$A'\mathbf{x}' = \mathbf{b}' - A''\mathbf{x}''. \tag{6}$$

Tutte le soluzioni $\mathbf{x}$ possono allora essere assegnando alle incognite che formano $\mathbf{x}''$ valori arbitrari e ricavando le incognite che compongono $\mathbf{x}'$, per sostituzione all'indietro, dal sistema triangolare (6).

La riduzione di un sistema lineare a forma a scalini è comunemente nota come *metodo di Gauss* o *eliminazione gaussiana*.

La riduzione nel caso di un sistema lineare omogeneo di n equazioni in k incognite è stata già descritta nell'esercizio 5 del Capitolo 1.

3.17 Esercizi.

- **1.** Verificare che l'insieme delle matrici il cui determinante è nullo non è uno spazio vettoriale.

  (Traccia: costruire due matrici A e B tali che $\det A = \det B = 0$ e $\det(A+B) \neq 0$.)

•• **2.** Calcolare il determinante delle matrici $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, i cui elementi sono

a) $\qquad a_{ij} = 0$ per $j > n+1-i$;

b) $\qquad a_{ij} = \begin{cases} \alpha+\beta & \text{se } i = j, \\ \alpha & \text{se } i \neq j, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$

(Traccia: a) $\det A = (-1)^k a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$, dove $k = n(n-1)/2$,
b) $\det A = \beta^{n-1}(n\alpha+\beta)$.)

• **3.** Dimostrare che se tutte le somme per righe degli elementi di A sono nulle, allora la matrice A è singolare.

(Traccia: il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette la soluzione $\mathbf{x} = [1, 1, \ldots, 1]^T$.)

••• **4.** Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n numeri reali e sia A la matrice (detta di *Vandermonde*) di elementi

$$a_{ij} = x_i^{j-1}, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dimostrare che $\det A = \prod_{\substack{i,k=1,n \\ i<k}} (x_k - x_i)$, e quindi $\det A \neq 0$ se i numeri x_i sono a due a due distinti.
(Traccia: dimostrare per induzione che, detto V_n il determinante della matrice A di ordine n, vale la relazione

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V_{n-1}.$$

Per questo, conviene sottrarre dalla k-esima colonna di A la $(k-1)$-esima moltiplicata per x_1, per $k = n, n-1, \ldots, 2$).

••• **5.** Una matrice tridiagonale $A_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ha la forma

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & & \bigcirc \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \bigcirc & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Dimostrare che vale la relazione ricorrente

$$\det A_n = \alpha_n \det A_{n-1} - \beta_n \gamma_n \det A_{n-2},$$

con cui si può calcolare il determinante di A_n a partire dalle due relazioni iniziali

$$\det A_1 = \alpha_1, \qquad \det A_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_2\gamma_2.$$

Considerare i casi particolari

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 2, \quad \beta_2 = \cdots = \beta_n = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 1,$$
$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 1, \quad \beta_2 = \cdots = \beta_n = -1.$$

(Traccia: sviluppare $\det A_n$ con la regola di Laplace applicata all'ultima riga.)

••• **6.** Siano $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ non singolari e sia

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}.$$

Verificare che

a) $A = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix};$

b) $\det A = \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12});$

c) se S è non singolare

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

• **7.** Modificare l'esercizio precedente in modo da trattare il caso

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & \alpha \end{bmatrix}, \ \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

••• **8.** Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Allora

$$\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

e se $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq -1$

$$(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u}}.$$

(Traccia: verificare prima che

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

e che

$$\begin{bmatrix} I & -\mathbf{u} \\ \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & -\mathbf{u} \\ \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

poi applicare il teorema di Binet.)

•• **9.** Siano $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ non singolare e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Dimostrare che

a) $\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} = -1$, se e solo se la matrice $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ è singolare,

b) se la matrice $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ è non singolare, allora

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}}.$$

(Traccia: applicare la relazione dell'esercizio precedente alla matrice $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T = A(I + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$.)

•• **10.** Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Dimostrare che valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\mathrm{adj}(A^T) = (\mathrm{adj}A)^T,\\
&\mathrm{adj}I = I,\\
&\mathrm{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1}\mathrm{adj}A, \quad \text{per } \alpha \in \mathbf{R},\\
&\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}B\ \mathrm{adj}A, \quad \text{e quindi}\\
&\mathrm{adj}A^{-1} = (\mathrm{adj}A)^{-1}, \quad \text{se } A \text{ è non singolare},\\
&\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1},\\
&\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A;
\end{aligned}$$

••• **11.** Sia $A = I + B$, dove $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è una matrice triangolare in senso stretto. Dimostrare che la matrice A è invertibile e che

$$A^{-1} = I - B + B^2 - \cdots + (-1)^k B^k, \quad \text{dove } k \le n-1.$$

••• **12.** Dati n numeri reali, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considerare la matrice A di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{i-j+1} & \text{se } i \ge j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che la matrice $B = A^{-1}$ ha elementi del tipo

$$b_{ij} = \begin{cases} y_{i-j+1} & \text{se } i \ge j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ed esaminare in particolare i casi

(1) $x_i = i$, per $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $x_1 = 1,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = \cdots = x_n = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

(Traccia: per mezzo della matrice

$$U = \begin{bmatrix} 0 & & & \bigcirc \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si può scrivere $A = x_1 I + x_2 U + x_3 U^2 + \cdots + x_n U^{n-1}$. Verificare che la matrice A^{-1} è della stessa forma della A, determinando le n costanti $y_1, y_2, \cdots, y_n$ tali che $A^{-1} = y_1 I + y_2 U + y_3 U^2 + \cdots + y_n U^{n-1}$.
Per i casi particolari si ha:

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(2) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \alpha & 1 & & & \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha^{n-1} & \cdots & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}. \;)$$

••• **13.** Calcolare l'inversa della matrice A di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -\dfrac{j}{i} & \text{se } i = j+1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

(Traccia: dimostrare per induzione sull'ordine della matrice che gli elementi di $B^{-1} = A$ sono dati da

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{j}{i} & \text{se } j \le i, \\ 0 & \text{altrimenti. }) \end{cases}$$

•• **14.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$N(A^T)$, $S(A^T)$. Verificare che
$S(A)^\perp = N(A^T)$ e $S(A^T)^\perp = N(A)$.
(Traccia: Verificare che
$S(A)$ è formata da vettori della forma $[-\alpha+\beta, \alpha, 3\alpha-\beta, \beta]^T$,
$N(A)$ è formata da vettori della forma $[\alpha, 3\alpha-2\beta, -2\alpha, \beta]^T$,
$S(A^T)$ è formata da vettori della forma $[-3\alpha+2\beta, \alpha, \beta, 2\alpha]^T$,
$N(A^T)$ è formata da vettori della forma $[\alpha+3\beta, \alpha, \beta, -\alpha-2\beta]^T$,
dove α e $\beta \in \mathbf{R}$.)

•• **15.** Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

• **16.** Si consideri la matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con α numero reale. Calcolare il determinante di A.

•• **17.** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & kx_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ kx_1 & & & + & kx_3 & = & 0 \end{array},$$

con k numero reale. Si individuino i valori di k per cui:
a) esiste una sola soluzione;
b) non esiste nessuna soluzione;
c) esistono infinite soluzioni.
In quest'ultimo caso si determini l'insieme delle soluzioni.

• **18.** Si dica se esistono valori reali di k per i quali il sistema lineare

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

ha infinite soluzioni.

• **19.** Si determinino con il metodo di Gauss tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \end{array} .$$

• **20.** Dato il sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \alpha \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & & & = & 1 \end{array} ,$$

$\alpha \in \mathbf{R}$, si determinino, se è possibile:
– una scelta di α per cui non esistono soluzioni;
– una scelta di α per cui esistono infinite soluzioni.
Nel secondo caso si determini anche l'insieme delle soluzioni.

• **21.** Si calcoli il determinante della matrice $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

dove α è un numero reale. Per quali valori di α la matrice A è singolare?

• **22.** Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} .$$

• **23.** Per quali valori reali k_1 e k_2 il sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & k_1x_2 & + & x_3 & = & k_2 \\ x_1 & - & x_2 & + & k_1x_3 & = & -2 \end{array}$$

ha infinite soluzioni?.

•• **24.** Si descriva, per $k \in \mathbf{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & kx_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} .$$

•• **25.** Sia $N(A)$ lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Si determini la dimensione di $N(A)$ e se ne indichi una base.

•• **26.** Si esprima in funzione di α il determinante della matrice $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

dove α è un numero reale. Per quali valori di α la matrice A è singolare?

•• **27.** È dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 4 \end{array} ,$$

dove $k \in \mathbf{R}$. Si calcolino, se esistono, i valori del parametro k per cui esistono infinite soluzioni, e, per tali valori di k, si determini l'insieme delle soluzioni.

•• **28.** È dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ -x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & & & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \end{array} .$$

Si verifichi che il sistema ha infinite soluzioni. Se ne individui una ortogonale al vettore $[\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]$.

•• **29.** Si consideri il sottoinsieme S dei vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma

$$\begin{bmatrix} a+c \\ b-c \\ a+b \end{bmatrix},$$

dove a, b e c sono numeri reali. Dopo aver verificato che S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, se ne determini la dimensione e si trovi una base ortonormale di S.

•• **30.** Dati i vettori $\mathbf{u} = [1 \;\; 2 \;\; 1]^T$ e $\mathbf{v} = [2 \;\; -1 \;\; 1]^T$, si dica per quale valore di k il vettore $[1 \;\; k \;\; 5]^T$ risulta combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

•• **31.** Si determinino, con il metodo di Gauss, le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -4\,. \\ 3x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \end{array}$$

•• **32.** Si vuole applicare il metodo di Gauss al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove A è la matrice $n \times n$ i cui elementi a_{ij} sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{per } j = i+1,\ i = 1, \dots, n-1 \text{ e per } i = n,\ j = 1 \\ \beta & \text{per } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dove α e β sono numeri reali, e $\mathbf{b} = \mathbf{e}_n$, n-esimo vettore della base canonica di $\mathbf{R}^n$.

(a) S i determinino tutti i valori di α e β per cui il sistema ammette una sola soluzione e il metodo di Gauss è applicabile senza scambi di righe;

(b) per tali valri di α e β si risolva il sistema con il metodo di Gauss.

•• **33.** È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con k reale.

(a) Si indichino, se esistono, i valori di k per i quali A ha rango 2.

(b) Posto $k = 1$, si determinino tutte le soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{x} = [2 \;\; 3 \;\; 2]^T$.

(c) Si dica se esiste una di tali soluzioni ortogonale al vettore $[1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.