Appunti di

ALGEBRA LINEARE

Corso di Laurea in Chimica – A. A. 2009/2010

Capitolo 1

SPAZI VETTORIALI

In matematica si incontrano spesso insiemi di elementi su cui sono definite delle operazioni che godono di particolari proprietà. È molto importante individuare quali fra queste proprietà sono caratterizzanti, cioè sono necessarie e sufficienti per ottenere certi risultati generali. Si ottengono così delle *strutture algebriche* definite mediante operazioni che soddisfano certi *assiomi*. Le principali fra queste strutture sono, in ordine di complessità crescente, i gruppi, gli anelli, i campi e gli spazi vettoriali. In questo capitolo ci occuperemo di questi ultimi.

Uno *spazio vettoriale* è definito su un campo di numeri, i cui elementi vengono chiamati *scalari*. Si assumerà qui che questo campo sia quello dei numeri reali (ma potrebbe anche essere, ad esempio, quello dei numeri complessi).

1.1 Definizione di spazio vettoriale.

Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia V un insieme su cui sono definite due operazioni: un'operazione di *addizione* che associa ad ogni $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V$ la somma $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$ e un'operazione di *moltiplicazione per scalare* che associa ad ogni $\mathbf{u} \in V$ e ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ il prodotto $\alpha\mathbf{u} \in V$. Se valgono le seguenti proprietà:

(1) per ogni $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ è $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$,

(2) esiste in V un elemento $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$,

(3) per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste in V un elemento, indicato con $-\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$,

(4) per ogni $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V$ è $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$,

(5) per ogni $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ è $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$,

(6) per ogni $\mathbf{u} \in V$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ è $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$,

(7) per ogni $\mathbf{u} \in V$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ è $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$,

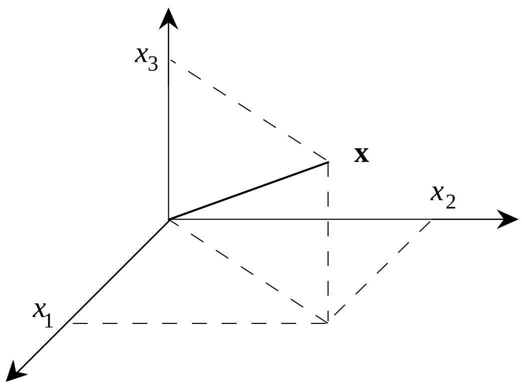
(8) per ogni $\mathbf{u} \in V$ è $1\ \mathbf{u} = \mathbf{u}$, dove con 1 si indica l'unità di $\mathbf{R}$,

si dice che V è uno *spazio vettoriale* (su $\mathbf{R}$). Gli elementi di V sono generalmente chiamati *vettori.* Vale anche, come conseguenza delle precedenti, la proprietà:

(9) per ogni $\mathbf{u} \in V$ è $0\ \mathbf{u} = \mathbf{0}$, dove con 0 si indica lo scalare 0 di $\mathbf{R}$.

1.2 Lo spazio $\mathbf{R}^n$.

Uno spazio vettoriale molto importante è $\mathbf{R}^n$, cioè l'insieme delle n-uple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove $n \geq 1$ è un intero e $x_i \in \mathbf{R}$ per $i = 1, \dots, n$. Le x_i sono dette *componenti.* Gli elementi di $\mathbf{R}^n$ possono essere visti come generalizzazione delle coppie ordinate di numeri reali con cui si rappresentano i punti del piano cartesiano. Ad esempio in $\mathbf{R}^3$ si rappresentano i punti dello spazio.



Su $\mathbf{R}^n$ si definiscono le operazioni di

a) addizione: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, con $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, è l'$n$-upla le cui componenti sono $z_i = x_i + y_i$ per $i = 1, \dots, n$,

b) moltiplicazione per scalare: $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, è l'n-upla le cui componenti sono $y_i = \alpha x_i$ per $i = 1, \dots, n$.

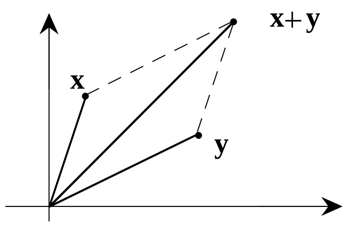
È facile verificare che le operazioni così definite soddisfano le proprietà (1) - (8), per cui l'insieme $\mathbf{R}^n$ risulta uno spazio vettoriale. Perciò d'ora in poi gli elementi di $\mathbf{R}^n$ saranno chiamati vettori e si userà la convenzione di scrivere i vettori per *colonna*, in questo modo

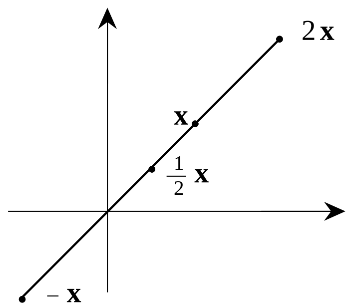
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Si indicherà invece con $\mathbf{x}^T$ il vettore *riga*, cioè il vettore le cui componenti sono scritte in orizzontale, in questo modo

$$\mathbf{x}^T = \left[x_1, x_2, \dots, x_n\right].$$

In $\mathbf{R}^2$ si può dare una semplice interpretazione geometrica delle operazioni definite.





1.3 Dipendenza e indipendenza lineare.

Dati m vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di uno spazio vettoriale V ed m scalari $\alpha_1, \ldots,$ α_m, il vettore

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m, \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbf{R},$$

è detto *combinazione lineare* di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Gli α_i sono i *coefficienti* della combinazione. Si dice che i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli. m vettori che non sono linearmente dipendenti si dicono *linearmente indipendenti.*

Per esempio i tre vettori di $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

sono linearmente dipendenti. Infatti si ha $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - 3\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Se un vettore $\mathbf{v}$ di V può essere espresso come combinazione lineare di m vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linearmente indipendenti di V, questo può accadere in un solo modo. Infatti se fosse

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m,$$

ne seguirebbe che

$$(\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m) \mathbf{v}_m = 0,$$

e quindi $\alpha_i - \beta_i = 0$ per $i = 1, \ldots, m$.

1.4 Base di uno spazio vettoriale.

Si dice che m vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ costituiscono una *base* di V se ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori della base

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mathbf{v}_i.$$

Si dice anche che V è *generato* dalla base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$.

Una base di $\mathbf{R}^n$ particolarmente importante è la cosiddetta *base canonica*, formata dai vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, dove

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \quad i-\text{esima componente} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Infatti si può sempre scrivere

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Dato uno spazio vettoriale V non è sempre detto che esista una base di V formata da un numero finito m di elementi. Se però uno spazio V ha una base formata da un numero finito di elementi, allora ogni altra base di V è formata dallo stesso numero di elementi, come indicato dal seguente teorema.

1.5 Teorema.

Sia V uno spazio vettoriale e si supponga che esista una base di V formata da un numero finito m di elementi. Allora tutte le basi di V hanno m elementi.

Dim. Consideriamo due basi $B_v = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $B_w = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ di V. Ogni elemento di V, e quindi in particolare i vettori $\mathbf{w}_j$, è rappresentabile come combinazione lineare dei vettori di B_v

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \mathbf{v}_i, \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Non è possibile che tutti i coefficienti α_{j1} siano uguali a 0 perché, se così fosse, per rappresentare tutti i vettori di B_w, e quindi di V, sarebbero sufficienti i vettori $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, e quindi $\mathbf{v}_1$ sarebbe linearmente dipendente da $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Deve perciò esistere almeno un indice r per cui $\alpha_{r1} \neq 0$. Si può allora esprimere $\mathbf{v}_1$ così:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\alpha_{r1}} \Big(\mathbf{w}_r - \sum_{i=2}^{m} \alpha_{ri}\mathbf{v}_i\Big), \tag{1}$$

e $\mathbf{v}_1$ può essere sostituito, nelle combinazioni lineari in cui compare, con una combinazione lineare di $\mathbf{w}_r$ e di $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Inoltre $\mathbf{w}_r$ è linearmente indipendente da $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, altrimenti per la (1) v_1 sarebbe linearmente dipendente da $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Abbiamo così ottenuto, a partire dalla base B_v di V un'altra base $\{\mathbf{w}_r, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Il procedimento si può ripetere, sostituendo successivamente vettori di B_w al posto di $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ I vettori di B_w che si usano per sostituire i vettori di B_v risultano diversi ad ogni passo, dovendo essere linearmente indipendenti da quelli già usati nelle sostituzioni precedenti.

Se per assurdo fosse $m > k$, ci troveremmo al termine di questo procedimento di sostituzione con un'altra base formata dai vettori $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, di cui i primi k costituiscono da soli una base, e quindi gli altri $m-k$ sono linearmente dipendenti da essi. (È anche assurdo supporre che $m < k$, perché i ruoli delle due basi possono essere scambiati).

■

Uno spazio vettoriale V avente una base formata da un numero finito m di elementi si dice a *dimensione finita*. Si indica $m = \dim V$. Uno spazio vettoriale che non ha dimensione finita viene detto a *dimensione infinita*.

Dal teorema 1.5 discende che se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita m, allora

(a) ogni insieme di m vettori linearmente indipendenti di V costituisce una base di V;

(b) ogni insieme di k vettori di V con $k > m$ è linearmente dipendente;

(c) se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono k vettori linearmente indipendenti di V con $k < m$, esistono $m-k$ vettori $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$ tali che l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ costituisce una base di V.

La base canonica di $\mathbf{R}^n$ è costituita da n vettori. Quindi n è la dimensione di $\mathbf{R}^n$ e ogni altro insieme di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$ costituisce una base.

1.6 Sottospazi.

Un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V è detto *sottospazio* se è esso stesso uno spazio vettoriale.

Se S non coincide con V (cioè se S è un sottospazio *proprio*), è $\dim S < \dim V$. Se S e T sono due sottospazi di V, la somma

$$S + T = \{\mathbf{s} + \mathbf{t},\ \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in T\}$$

e l'intersezione $S \cap T$ sono ancora sottospazi.

Per esempio, in $\mathbf{R}^3$ consideriamo il sottospazio S generato dal vettore

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e il sottospazio T generato dai vettori

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S risulta formato da tutti i vettori le cui prima terza componente sono nulle, mentre T risulta formato da tutti i vettori che hanno uguali la prima e la terza componente. Quindi $\dim S = 1$ e $\dim T = 2$. È facile vedere che $S + T = T$ e che $S \cap T = S$.

1.7 Somma diretta.

Uno spazio vettoriale V è detto *somma diretta* di due suoi sottospazi S e T se

$$V = S + T \qquad \text{e} \qquad S \cap T = \{\,\mathbf{0}\,\}.$$

Si indica di solito con $V = S \oplus T$.

1.8 Teorema.

È $V = S \oplus T$ se e solo se ogni elemento $\mathbf{v} \in V$ può essere espresso univocamente con la somma

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in T.$$

Dim. Sia $V = S \oplus T$ e sia $\mathbf{v} \in V$. Se si potesse esprimere $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t} = \overline{\mathbf{s}} + \overline{\mathbf{t}}$, con $\mathbf{s} \neq \overline{\mathbf{s}}$ e $\mathbf{t} \neq \overline{\mathbf{t}}$, sarebbe $\mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{t}} - \mathbf{t} \in S \cap T = \{\,\mathbf{0}\,\}$ e quindi dovrebbe essere $\mathbf{s} = \overline{\mathbf{s}}$ e $\mathbf{t} = \overline{\mathbf{t}}$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistano unici $\mathbf{s} \in S$ e $\mathbf{t} \in T$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$. Quindi $V \subset S + T$. D'altra parte S e T sono sottospazi di V, quindi $V \supset S + T$. Ne segue che $V = S + T$. Se per assurdo esistesse un $\mathbf{w} \in S \cap T$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, avremmo anche $\mathbf{v} = (\mathbf{s} + \mathbf{w}) + (\mathbf{t} - \mathbf{w})$, con $\mathbf{s}+\mathbf{w} \in S$ e $\mathbf{t}-\mathbf{w} \in T$ e $\mathbf{v}$ non sarebbe espresso in modo unico come somma di un vettore di S e di uno di T. ■

1.9 Teorema.

Se $V = S \oplus T$, allora

$$\dim V = \dim S + \dim T. \qquad (2)$$

Dim. Sia $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p\}$ una base di S e $\{\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_r\}$ una base di T. Dovendo essere $S \cap T = \{\, \mathbf{0} \,\}$, i vettori $\mathbf{s}_i$, $i = 1, \ldots, p$ e $\mathbf{t}_i$, $i = 1, \ldots, r$ sono linearmente indipendenti. Inoltre ogni vettore di $V = S \oplus T$ è esprimibile come combinazione lineare dei vettori s_i e t_i. Quindi $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_p, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_r\}$ è una base di V e risulta $\dim V = p + r = \dim S + \dim T$. ■

In $\mathbf{R}^3$ il sottospazio S generato dal vettore

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(formato da tutti i vettori la cui prima componente è nulla e che hanno uguali la seconda e la terza componente) e il sottospazio T generato dai vettori

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono tali che $\mathbf{R}^3 = S \oplus T$, infatti $S \cap T = \{\, \mathbf{0} \,\}$.

Se S e T sono due sottospazi qualsiasi di V, la relazione fra le loro dimensioni e la dimensione di V è un po' più complessa della (2). Si può infatti dimostrare che

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Consideriamo in $\mathbf{R}^3$ il sottospazio S generato dai vettori

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(formato da tutti i vettori la cui terza componente è nulla) e il sottospazio T generato dai vettori

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(formato da tutti i vettori la cui prima componente è nulla). $S \cap T$ contiene tutti i vettori aventi prima e terza componente nulle, ma non la seconda, per cui $S \cap T \neq \{\,\mathbf{0}\,\}$. Risulta allora $\mathbf{R}^3 = S + T \neq S \oplus T$. Le dimensioni sono

$$\dim S = \dim T = 2, \quad \dim S \cap T = 1, \quad \dim S + T = 3.$$

Nel seguito ci occuperemo solo di spazi vettoriali a dimensione finita.

1.10 Prodotto scalare.

Su uno spazio vettoriale V si può definire una nuova struttura, quella di prodotto scalare. Si tratta di una applicazione che associa ad ogni coppia di vettori di V uno scalare di $\mathbf{R}$, definita in modo che siano soddisfatte certe proprietà. Questa struttura ci permetterà di introdurre concetti importanti, come lunghezza e ortogonalità di vettori. Utilizzeremo per semplicità lo spazio $\mathbf{R}^n$, ma le proprietà che studieremo valgono per qualsiasi spazio vettoriale a dimensione finita.

Nei diversi testi di algebra lineare per il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vengono usate diverse notazioni, fra cui le più frequenti sono

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad <\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}> \qquad \mathbf{x}^T\mathbf{y}.$$

Noi useremo l'ultima, che risulta compatibile con la definizione di prodotto fra matrici che vedremo nel prossimo capitolo. Con la notazione usata per i vettori riga e colonna è

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Si definisce *prodotto scalare* (o *interno*) l'applicazione $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, che a due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ associa lo scalare

$$\alpha = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

È facile verificare che il prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$ gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \ge 0,\quad$ ed è nullo se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$;
3. $\mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\, \mathbf{x}^T\mathbf{y} \qquad$ per $\alpha \in \mathbf{R}$;
4. $\mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z} \qquad$ per $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$.

Vale inoltre la disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}^T\mathbf{x})\ (\mathbf{y}^T\mathbf{y}).$$

1.11 Lunghezza di un vettore.

Per analogia con quanto accade in $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$, la quantità

$$\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$$

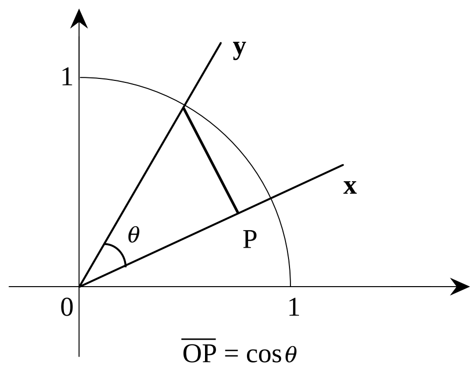
viene detta *lunghezza euclidea* del vettore $\mathbf{x}$. Dato un vettore $\mathbf{x}$ di lunghezza qualsiasi, il vettore $\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}}\,\mathbf{x}$ ha lunghezza 1. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta

$$\frac{|\mathbf{x}^T\mathbf{y}|}{\sqrt{(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\ (\mathbf{y}^T\mathbf{y})}} \le 1,$$

e si può considerare la quantità

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\sqrt{(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\ (\mathbf{y}^T\mathbf{y})}},$$

che viene definita *angolo* formato da due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. È facile verificare che in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$ questa definizione corrisponde al concetto geometrico di angolo, come si può vedere nel caso di $\mathbf{R}^2$ nella figura.



1.12 Vettori ortogonali.

Se $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, i due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono detti *ortogonali.*

Più in generale si dice che k vettori non nulli $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ sono *ortogonali* se $\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = 0$ per $i \neq j$, e sono *ortonormali* se sono ortogonali ed inoltre $\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_i = 1$, cioè se hanno lunghezza 1 o, come si dice, se sono *normalizzati.* In questo caso si usa anche la notazione

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = \delta_{ij},$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

è detto *delta di Kronecker.*

Si osservi che k vettori ortogonali sono anche linearmente indipendenti.

I vettori

$$\mathbf{x} = [1,\ 1,\ -1]^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = [1,\ 1,\ 1]^T,$$

sono linearmente indipendenti, ma non ortogonali: infatti $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1 \neq 0$. I vettori

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{8}}\,[-2,\ 2,\ 0]^T$$

sono ortonormali: infatti $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 1$ e $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$.

Fra le diverse basi di $\mathbf{R}^n$ sono particolarmente importanti le *basi ortonormali*, cioè quelle i cui vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sono ortonormali.

1.13 Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Se del sottospazio S di $\mathbf{R}^n$ è nota una base $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, è sempre possibile costruirne una ortonormale $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ servendosi del seguente teorema.

1.14 Teorema.

Se $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $k \leq n$, sono k vettori linearmente indipendenti, i vettori $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, così costruiti

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_1}}\,\mathbf{t}_1,$$

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1}(\mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j)\,\mathbf{y}_j, \qquad \mathbf{y}_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_i^T\mathbf{t}_i}}\,\mathbf{t}_i, \qquad i = 2, \ldots, k,$$

sono ortonormali.

Dim. Per ogni i il vettore $\mathbf{y}_i$ è linearmente dipendente da $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i$ ed è normalizzato. Per dimostrare l'ortogonalità si procede per induzione su k. Per $k = 2$ è

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_1)\, \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{0}$$

e

$$\mathbf{t}_2^T \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_1 - (\mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_1)\, \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 = 0,$$

quindi $\mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_1 = 0$. Per $k > 2$, supponendo che i vettori $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$ siano ortonormali, si dimostra che $\mathbf{t}_k \neq \mathbf{0}$ e ortogonale a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$. Infatti se fosse $\mathbf{t}_k = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_k$ risulterebbe uguale ad una combinazione lineare degli $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$ e quindi degli $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$, che è assurdo. Inoltre, poiché

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{y}_i = 0 \quad \text{per} \quad j,\ i \leq k-1,\ i \neq j,$$

risulta

$$\mathbf{t}_k^T \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_k^T \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{y}_j)\, \mathbf{y}_j^T \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_k^T \mathbf{y}_i - (\mathbf{x}_k^T \mathbf{y}_i)\, \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i = 0. \qquad \blacksquare$$

I vettori di $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

sono linearmente indipendenti. Applicando il metodo di Gram-Schmidt si ottengono i vettori

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che costituiscono una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

1.15 Sottospazi ortogonali.

Sia S un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. Il sottospazio

$$S^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \ :\ \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0 \text{ per ogni } \mathbf{v} \in S\}$$

è detto *sottospazio ortogonale* ad S.

1.16 Teorema.

Valgono le seguenti relazioni

$$(a) \quad S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}, \quad (b) \quad S \oplus S^\perp = \mathbf{R}^n, \quad (c) \quad \dim S^\perp = n - \dim S.$$

Dim. (a) un vettore $\mathbf{x} \in S \cap S^\perp$ deve essere tale che $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 0$, e questo è possibile se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(b) Dimostriamo che $\mathbf{R}^n = S + S^\perp$. Se S avesse dimensione n, S coinciderebbe con $\mathbf{R}^n$ e $S^\perp = \{\mathbf{0}\}$ e il risultato sarebbe banale. Sia allora $k = \dim S < n$ e sia $\{\mathbf{s}_1, \ldots, s_k\}$ una base di S. Consideriamo una base $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_{k+1}, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ di $\mathbf{R}^n$ e costruiamo con il metodo di Gram-Schmidt una base ortonormale $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n\}$. L'insieme $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\}$ costituisce una base ortogonale di S, i vettori $\mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ sono ortogonali ai vettori $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ e quindi a tutti i vettori di S. Perciò $\mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n \in S^\perp$ e se $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \mathbf{y}_i = \mathbf{v} + \mathbf{t},$$

con $\mathbf{v} \in S$ e $\mathbf{t} \in S^\perp$. Quindi per il teorema 1.8 è $\mathbf{R}^n = S \oplus S^\perp$.
(c) Segue dal teorema 1.9. ∎

1.17 Proiezione ortogonale.

Dal teorema 1.16 segue che ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ può essere espresso univocamente come somma

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{t}, \ \mathbf{s} \in S, \ \mathbf{t} \in S^\perp. \tag{3}$$

Il vettore $\mathbf{s}$ è detto *proiezione ortogonale* di $\mathbf{x}$ su S.

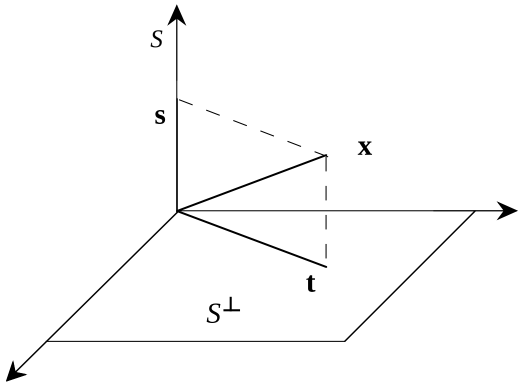
In $\mathbf{R}^3$ sia S il sottospazio generato dal vettore

$$\mathbf{x}_1 = [0, \, 0, \, 1]^T.$$

S è quindi costituito da tutti i vettori le cui due prime componenti sono nulle, e la sua dimensione è 1. Lo spazio $S^\perp$, costituito dai vettori la cui terza componente è nulla, è quindi generato dai vettori

$$\mathbf{x}_2 = [1, \, 0, \, 0]^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}_3 = [0, \, 1, \, 0]^T$$

e la sua dimensione è 2. La figura fornisce per questo caso l'interpretazione geometrica della relazione (3).



1.18 Esercizi.

1. Verificare che in uno spazio vettoriale V

- • a) vale la *legge di cancellazione*, cioè se $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}=\mathbf{w}$;
- •• b) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$;
- •• c) per ogni $\mathbf{v} \in V$ è $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$;
- • d) se $\alpha\mathbf{v}=\mathbf{0}$ è $\alpha=0$ oppure $\mathbf{v}=\mathbf{0}$;
- • e) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$ è $(-\alpha)\mathbf{v}=\alpha(-\mathbf{v})=-(\alpha\mathbf{v})$;

• **2.** Verificare che l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a n è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione per scalare.

• **3.** Verificare che $\mathbf{R}^n$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione per scalare.

• **4.** Verificare che l'insieme S delle coppie ordinate di numeri reali non è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalare così definite

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2).$$

• **5.** Per stabilire se k vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbf{R}^n$, $k \leq n$, sono linearmente indipendenti si deve verificare se la combinazione lineare $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$, $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$, è nulla solo per $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, o equivalentemente se il *sistema lineare omogeneo*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

di n equazioni nelle k *incognite* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ha la sola *soluzione nulla.* Anche se lo studio e la risoluzione dei sistemi lineari verrano affrontati nel Capitolo 3, per poter fin d'ora accertare l'indipendenza (o la dipendenza) lineare di un insieme di vettori, anticipiamo il seguente metodo di *riduzione a forma a scalini.*

1o passo. Si considera la prima equazione. Se il coefficiente di α_1 è non nullo si ricava l'incognita α_1 (in funzione di $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$), la si sostituisce in tutte le equazioni seguenti, e poi si prosegue al passo successivo. Se invece il coefficiente di α_1 è nullo si scambia la prima equazione con una, fra le seguenti, in cui tale coefficiente sia non nullo, e si procede come sopra. Se ciò non è possibile perché in tutte le equazioni seguenti il coefficiente di α_1 è nullo, si considera α_2 come incognita da ricavare e da sostituire e si procede come sopra.

i-esimo passo, $i = 2, \ldots$. Si considera la i-esima equazione. Sia α_j la prima incognita non ancora sostituita nei passi precedenti. Si procede come nel primo passo, con l'equazione i-esima al posto della prima e α_j al posto di α_1.

Il metodo si arresta al più tardi al passo $n-1$ (precedentemente se sono state sostituite tutte le incognite). Sia s il numero delle equazioni che, al termine del metodo, non risultano tutte nulle. Ovviamente è $s \leq k$. Si dimostra che s è il numero di vettori linearmente indipendenti, fra quelli dati.

Dire se i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti, usando il metodo di riduzione a forma a scalini:

a) $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 0]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [0, 1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [1, 0, 1]^T;$

b) $\mathbf{x}_1 = [1, -2, -1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [-1, 0, 3]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [2, 1, -1]^T;$

c) $\mathbf{x}_1 = [1, -2, -1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [-1, 0, 3]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [1, -1, -2]^T.$

• **6.** Scrivere il vettore $[1, 2, 3]^T$ come combinazione lineare dei vettori

a) $\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3;$

b) $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 0]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [0, 1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [0, 0, 1]^T.$

•• **7.** Per quale valore di α il vettore $[1, 2, \alpha]^T$ è combinazione lineare dei vettori $[-1, 1, -1]^T$ e $[0, 3, 1]^T$.

• **8.** Dimostrare che $\mathbf{R}^3$ è generato dai vettori

$$\mathbf{x}_1 = [2, -1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [-1, 0, 1]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [1, 3, -1]^T.$$

• **9.** Dimostrare che $n+1$ vettori di $\mathbf{R}^n$ sono linearmente dipendenti.

•• **10.** Dati due vettori $\mathbf{v}_1 = [1, -1, -1]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [1, 1, -1]^T$, determinare un vettore $\mathbf{v}_3$ in modo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbf{R}^3$.

• **11.** Dimostrare che S è sottospazio di V se e solo se valgono le due condizioni
(a) S contiene lo $\mathbf{0}$,
(b) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e ogni $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in S$ è $\alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t} \in S$.

• **12.** Siano S e T sottospazi di V. Dimostrare che $S+T$ e $S \cap T$ sono sottospazi di V.

• **13.** Qual è il sottospazio generato da un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$?

• **14.** Dimostrare che se $\mathbf{s}$ genera S e $\mathbf{t}$ genera T, allora $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ genera $S+T$.

•• **15.** Sia S il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{s}_1 = [1, 1, 1]^T$ e $\mathbf{s}_2 = [1, 0, -1]^T$ e T quello generato dal vettore $\mathbf{t}_1 = [2, 1, 0]^T$. Dire quali sono le dimensioni di S, di T, di $S+T$ e di $S \cap T$.

• **16.** $\mathbf{R}^2$ è sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

• **17.** Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono dei sottospazi:
a) i vettori la cui prima componente è nulla;
b) i vettori la cui prima componente è positiva;
c) i vettori la cui lunghezza è uguale a 1;
d) i vettori la cui prima componente è doppia della seconda;
e) i vettori in cui il prodotto delle componenti è nullo;
f) i vettori aventi componenti uguali.

•• **18.** In $\mathbf{R}^4$ siano $\mathbf{x}$ un vettore le cui componenti hanno somma nulla, $\mathbf{y}$ un vettore le cui prima componente è nulla, $\mathbf{w}$ un vettore la cui terza componente è nulla e $\mathbf{z}$ un vettore le cui componenti hanno somma uguale a 1. Dire chi sono i sottospazi S, generato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e T, generato da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$. Quali sono le dimensioni di S e T? È vero che $S \oplus T = \mathbf{R}^4$?

••• **19.** Dimostrare che se S e T sono due sottospazi di V vale

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T),$$

e quindi

$$\max\{\dim S, \dim T\} \le \dim(S+T) \le \min\{\dim S + \dim T, n\},$$

$$\max\{0, \dim S + \dim T - n\} \le \dim(S \cap T) \le \min\{\dim S, \dim T\}.$$

•• **20.** Sia S il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai due vettori $[1,1,-1]^T$ e $[1,-1,0]^T$. Determinare un sottospazio T tale che $S \oplus T = \mathbf{R}^3$.

• **21.** Dimostrare che in $\mathbf{R}^n$ vale la seguente *legge del parallelogramma*

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 2\big(\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}\big).$$

• **22.** Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}^T\mathbf{x})\,(\mathbf{y}^T\mathbf{y}).$$

(Traccia: per $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, porre $\alpha = \dfrac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$ e sviluppare la disuguaglianza $(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}) \ge 0.$)

• **23.** Dimostrare che k vettori ortogonali di $\mathbf{R}^n$, con $k \le n$, sono linearmente indipendenti.

•• **24.** Verificare che i vettori di $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x}_i = [\ \underbrace{1,\ldots,1}_{i \text{ componenti}}\ , 0, \ldots, 0]^T, \quad i = 1, \ldots, n,$$

costituiscono una base non ortonormale. Quale base si ottiene applicando il metodo di Gram-Schmidt?
(Risposta: si ottiene la base canonica di $\mathbf{R}^n$.)

••• **25.** Siano S e T sottospazi di $\mathbf{R}^n$. Dimostrare che

$$(S^\perp)^\perp = S, \quad (S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp, \quad (S\cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp.$$

•• **26.** Sia S il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{s}_1 = [1,0,1,0]^T$ e $\mathbf{s}_2 = [-1,-1,-1,0]^T$. Determinare una base ortogonale di $S^\perp$.
(Risposta: $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$)

27. Sia $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$, n pari.

• a) Dimostrare che per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ è

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \text{dove} \quad \alpha_i = \mathbf{v}^T\mathbf{x}_i;$$

•• b) costruire con il metodo di Gram-Schmidt una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$ a partire dai vettori

$$\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4,\ \ldots, \mathbf{e}_{n-1}+\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_{n-1}-\mathbf{e}_n.$$

• **28.** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e lo spazio vettoriale V delle loro combinazioni lineari. Determinare la dimensione di V e individuarne una base ortonormale.

•• **29.** Dati i tre vettori di $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si consideri il sottospazio da essi generato

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3;\ \mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{z}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

Determinare la dimensione di S e trovare una base del sottospazio ortogonale $S^\perp$.

•• **30.** Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti, si consideri un terzo vettore $\mathbf{z}$ di $\mathbf{R}^3$, ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Si dimostri che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$. In particolare, per $\mathbf{u} = [1, 1, 1]^T$, $\mathbf{v} = [1, -1, 2]^T$, si indichi un vettore $\mathbf{z}$ di $\mathbf{R}^3$, ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

•• **31.** Si considerino l'insieme S di vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma $[x_1, 2x_1, x_3]^T$ e l'insieme T di vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma $[x_1, -x_1, x_1]^T$.
(a) si verifichi che S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.
(b) si determinino le loro dimensioni e si indichino delle basi.
(c) si verifichi che $\mathbf{R}^3 = S \oplus T$.

•• **32.** Sono dati i seguenti vettori di R^4:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se sono linearmente indipendenti. Nel caso che non lo siano, si trovi una base del sottospazio di R^4 formato dalle loro combinazioni lineari.

• **33.** Si determinino i vettori di $\mathbf{R}^3$ ortogonali ai vettori $\mathbf{v}_1 = [1\ 2\ 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [-3\ 4\ \ -1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [2\ \ -1\ 1]^T$.

• **34.** Dati i vettori $\mathbf{u} = [1, 1, 1]^T$, $\mathbf{v} = [1, 2, 1]^T$, e $\mathbf{w} = [1, -1, 1]^T$, si consideri il sottospazio S dei vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma $\alpha\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, e il sottospazio T dei vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Si stabilisca se è vero che $\mathbf{R}^3 = S \oplus T$.