Soluzione esercizio 1

Introduciamo le variabili decisionali $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \in \{0,1\}$, dove $x_A = 1$ significa che si è scelto di aprire un centro presso l'uscita A mentre $x_A = 0$ significa che si è scelto di non aprircelo ed analogamente per le altre variabili. La funzione che vogliamo minimizzare è ovviamente

$$c_A x_A + c_B x_B + c_C x_C + c_D x_D + c_E x_E.$$

Restano da individuare i vincoli. Per le regolamentazioni imposte, il centro A può assistere solamente le tratte a e b (ad esempio non può coprire la tratta c perché la distanza complessiva per assisterla sarebbe di 55 km); ragionando in maniera analoga, si ottiene la seguente tabella:

centro	tratte assistibili
A	a b
B	b c d e f
C	c d e i
D	f g h
E	a d e i

Affinché la tratta a sia assistita da almeno un centro, deve essere

$$x_A + x_E \geq 1. \tag{1}$$

Infatti, la tratta a può essere assistita solo dai centri A ed E ed il vincolo (1) impone che almeno uno di questi debba essere aperto. Ragionando analogamente per tutte le altre tratte, si ottengono i vincoli:

$$x_A + x_B \geq 1 \tag{2}$$

$$x_B + x_C \geq 1 \tag{3}$$

$$x_B + x_C + x_E \geq 1 \tag{4}$$

$$x_B + x_D \geq 1 \tag{5}$$

$$x_D \geq 1 \tag{6}$$

$$x_C + x_E \geq 1 \tag{7}$$

La formulazione è stata così completata. Si osservi che il nostro problema è in realtà un problema di copertura, dove l' insieme N degli elementi è costituito dalle tratte autostradali ($N = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$) e la famiglia dei sottoinsiemi da selezionare è determinata dalla tabella centri–tratte: $J_A = \{a, b\}$, ... , $J_F = \{a, d, e, i\}$.

Alcune semplificazioni possono essere apportate alla nostra formulazione: se il vincolo (3)è soddisfatto, anche il vincolo (4) lo è automaticamente, perciò quest' ultimo può essere omesso; poiché le variabili sono decisionali, il vincolo (6) impone che $x_D = 1$, ovvero che il centro D debba essere aperto, e conseguentemente il vincolo (5) risulta ridondante ed inoltre anche la funzione obiettivo può venir semplificata. In conclusione, il problema può essere ridotto al seguente problema in sole quattro variabili

$$\begin{aligned}
&\min \quad c_A x_A + c_B x_B + c_C x_C + c_E x_E \\
&x_A + x_E \geq 1 \\
&x_A + x_B \geq 1 \\
&x_B + x_C \geq 1 \\
&x_C + x_E \geq 1 \\
&x_A, x_B, x_C, x_E \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

tenendo presente che la sua soluzione ottima deve essere completata ponendo $x_D = 1$.