

Soluzione esercizio 2

Per formulare correttamente questa variante dell' esercizio 1, non è più sufficiente stabilire quali centri di assistenza aprire ma anche quali tratte autostradali ciascun centro aperto deve assistere. Indichiamo con $y_A, y_B, y_C, y_D, y_E \in \{0, 1\}$ le variabili decisionali che individuano quali centri aprire; la funzione obiettivo è ovviamente

$$c_A y_A + c_B y_B + c_C y_C + c_D y_D + c_E y_E.$$

Introduciamo $x_{aA} \in \{0, 1\}$, la variabile che individua se il tratto a è assistito dal centro A ($x_{aA} = 1$) oppure no ($x_{aA} = 0$) e definiamo analoghe variabili decisionali per ogni coppia tratta autostradale–centro che può assistere tale tratta.

Affinché il centro A possa assistere una data tratta è ovviamente necessario che sia aperto, quindi devono sussistere le seguenti relazioni

$$x_{aA} \leq y_A, \quad x_{bA} \leq y_A. \quad (8)$$

Inoltre, il centro A deve rispettare anche il vincolo di capacità

$$50x_{aA} + 25x_{bA} \leq 80. \quad (9)$$

Entrambi i vincoli possono essere espressi sinteticamente dall' unica relazione

$$50x_{aA} + 25x_{bA} \leq 80y_A. \quad (10)$$

Infatti, se $y_A = 0$ il vincolo (10) impone che $x_{aA} = x_{bA} = 0$ e quindi sia (8) che (9) sono verificati; se invece $y_A = 1$, il vincolo (8) è banalmente verificato e (10) si riduce a (9). Ragionando analogamente per gli altri centri di assistenza, si ottengono i vincoli

$$25x_{bB} + 30x_{cB} + 15x_{dB} + 10x_{eB} + 40x_{fB} \leq 80y_B \quad (11)$$

$$30x_{cC} + 15x_{dC} + 10x_{eC} + 25x_{iC} \leq 80y_C \quad (12)$$

$$40x_{fD} + 20x_{gD} + 25x_{hD} \leq 80y_D \quad (13)$$

$$50x_{aE} + 15x_{dE} + 10x_{eE} + 25x_{iE} \leq 80y_E. \quad (14)$$

Infine, bisogna imporre che ogni tratta sia servita da almeno un centro; utilizzando la tabella centri–tratte assistibili dell' esercizio 1 si ottengono i vincoli:

$$x_{aA} + x_{aE} \geq 1. \quad (15)$$

$$x_{bA} + x_{bB} \geq 1 \quad (16)$$

$$x_{cB} + x_{cC} \geq 1 \quad (17)$$

$$x_{dB} + x_{dC} + x_{dE} \geq 1 \quad (18)$$

$$x_{eB} + x_{eC} + x_{eE} \geq 1 \quad (19)$$

$$x_{fB} + x_{fD} \geq 1 \quad (20)$$

$$x_{gD} \geq 1, \quad x_{hD} \geq 1 \quad (21)$$

$$x_{iC} + x_{iE} \geq 1 \quad (22)$$

Questi vincoli sono gli analoghi di (1)–(7) ma mentre, ad esempio, il vincolo (4) da solo imponeva che le tratte d ed e fossero assistite da almeno un centro, nel nuovo problema è necessario imporre i due vincoli distinti (18) e (19) in quanto bisogna anche sapere quali sono i centri che assistono le tratte d ed e .

La formulazione è stata così completata; anche in questo caso è possibile apportare alcune semplificazioni. Infatti, i vincoli (21) impongono che $x_{gD} = 1$ e $x_{hD} = 1$ e quindi deve aversi che $y_D = 1$, come del resto già noto dall' esercizio 1; inoltre, alla luce di queste condizioni, da (13) segue che $x_{fD} = 0$ e conseguentemente (20) impone che $x_{fB} = 1$ e quindi anche $y_B = 1$. Il problema può quindi essere risolto fissando i valori di queste variabili ed eliminando i vincoli (13), (20) e (21).