Soluzione esercizio 3.2.2.

Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} &\max \quad cx \\ &Ax \leq 0 \end{aligned}$$

ponendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad c = [1, 2, -1].$$

Possiamo quindi applicare l'algoritmo del simpleso su coni.

I^o passo) Scegliamo $B = \{1, 3, 4\}$ come base di partenza; allora la matrice di base e la sua inversa risultano essere

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione del problema duale associata a B è data da $(\bar{y}_B, 0)$ con

$$\bar{y}_B := cA_B^{-1} = [1, 2, -1] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [-1, 0, -1]$$

che non è ammissibile in quanto $\bar{y}_B$ ha due componenti negative. Utilizzando il criterio anticiclo di Bland, l'indice uscente dalla base è $h = 1$ ed inoltre $B(h) = 1$. La direzione di crescita corrispondente ad h è

$$\bar{x} := -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ma non è ammissibilità in quanto

$$A_2 \bar{x} = 2, \qquad A_5 \bar{x} = 1.$$

Per il criterio di Bland, l'indice entrante è $k = 2$. Quindi, la nuova base risulta essere

$$B := B \setminus \{h\} \cup \{k\} = \{2, 3, 4\}.$$

II^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione duale associata a B individuata da

$$\bar{y}_B = [1/2, -3/2, -3/2].$$

Indice uscente:

$$h = 3 \quad \text{(ed inoltre } B(h) = 2\text{)}.$$

Direzione di crescita:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Ammissibilità della direzione di crescita:

$$A_1\bar{x} = -3/2, \quad A_5\bar{x} = 1/2.$$

Indice entrante:

$$k = 5.$$

Nuova base:

$$B = \{2, 4, 5\}$$

III^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione duale associata a B individuata da

$$\bar{y}_B = [-1, -3, 3].$$

Indice uscente:

$$h = 2 \quad \text{(ed inoltre } B(h) = 1\text{)}.$$

Direzione di crescita:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ammissibilità della direzione di crescita:

$$A_1\bar{x} = -1, \quad A_3\bar{x} = -1.$$

Poichè $\bar{x}$ è ammisssile, l'algoritmo termina e (P) è illimitato (e di conseguenza il problema duale è inammissibile).