Soluzione esercizio 3.3.6.

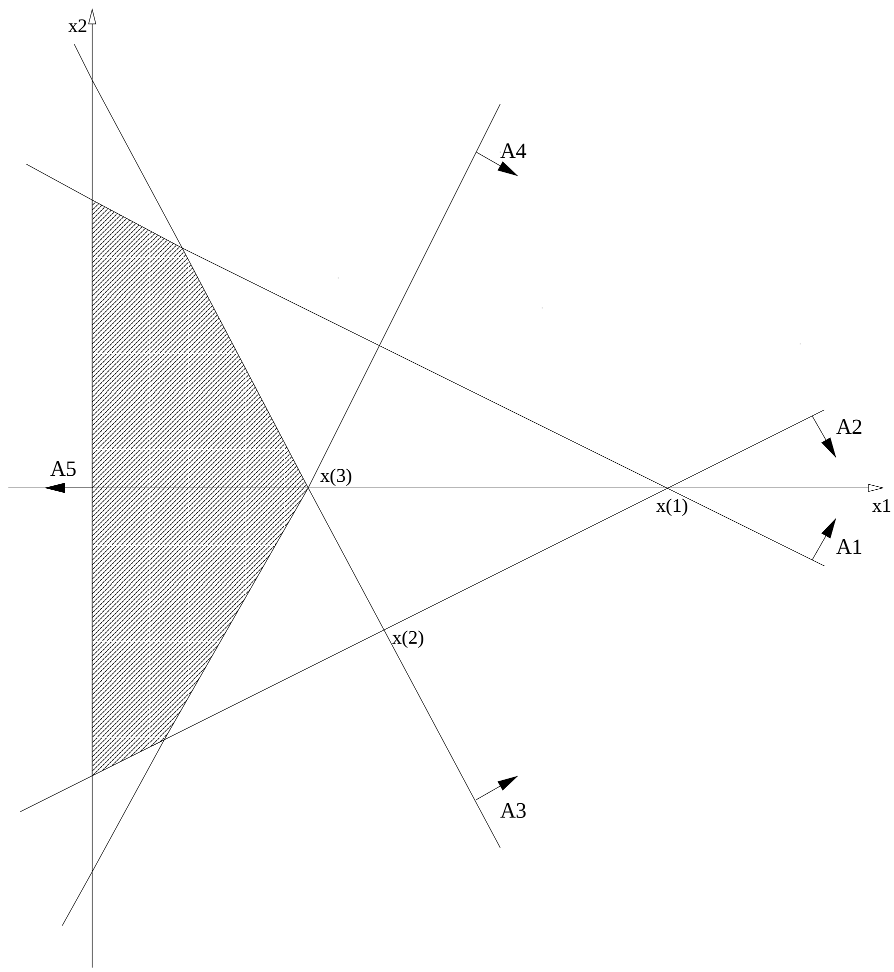
Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} &\max \quad cx \\ &Ax \leq b \end{aligned}$$

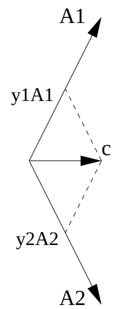
ponendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [1, 0].$$

Rappresentiamo graficamente la regione ammissibile ed i vincoli.



Possiamo applicare l'algoritmo del simplesso duale, partendo dalla base $B^{(1)} = \{1, 2\}$. Infatti, tale base è duale ammissibile in quanto c può essere espresso come combinazione lineare a coefficienti non negativi di A_1 ed A_2, come evidente anche dalla seguente figura.



I^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale risulta essere

$$\bar{y}_B^{(1)} = (\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(1)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(1)} = (\bar{y}_3^{(1)}, \bar{y}_4^{(1)}, \bar{y}_5^{(1)}) = (0, 0, 0).$$

La soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(1)} := A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

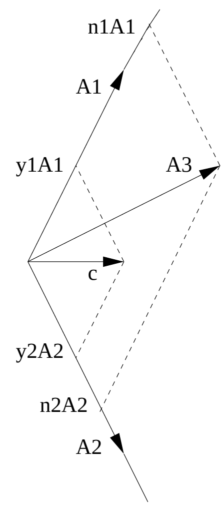
Dalla figura è evidente che $\bar{x}^{(1)}$ non è ammissibile e bisogna quindi effettuare almeno un passo dell'algoritmo del simplesso duale. Individuiamo l'indice entrante nella base: poiché $\bar{x}^{(1)}$ viola i vincoli 3 e 4, come si può dedurre geometricamente dalla figura, questi indici sono gli unici candidati; per la regola anticiclo di Bland, l'indice entrante è quello più piccolo e quindi 3. Formalmente:

$$b_N - A_N \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$k^{(1)} = 3.$$

È facile verificare che $\{1, 3\}$ e $\{1, 4\}$ sono entrambe basi duali ammissibili; perciò individuiamo geometricamente anche l'indice uscente, mediante il criterio del minimo rapporto: consideriamo la soluzione del sistema

$$\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 = A_3.$$



Dalla figura segue immediatamente che $\eta_1, \eta_2 > 0$ ed inoltre si intuisce piuttosto chiaramente che $y_1/\eta_1 < y_2/\eta_2$. Quindi l'indice uscente dovrebbe essere 1. Formalmente:

$$\bar{\eta}_B^{(1)} = (\bar{\eta}_1^{(1)}, \bar{\eta}_2^{(1)}) := A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(1)} = \min\{\bar{y}_i/\bar{\eta}_i \ : \ i \in B, \ \bar{\eta}_i > 0\} = \min\{2/5, 2/3\} = 2/5,$$

$$h^{(1)} = 1.$$

La nuova base è perciò

$$B^{(2)} = B^{(1)} \setminus \{1\} \cup \{3\} = \{3, 2\}.$$

II^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base duale risulta essere

$$\bar{y}_B^{(2)} = (\bar{y}_3^{(2)}, \bar{y}_2^{(2)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(2)} = (\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_4^{(2)}, \bar{y}_5^{(2)}) = (0, 0, 0).$$

Questa soluzione può anche essere calcolata nel seguente modo alternativo (sempre utile quanto meno per verificare la correttezza dei conti svolti):

$$(\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_2^{(2)}) = \bar{y}_B^{(1)} - \theta^{(1)} \bar{\eta}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} - (2/5) \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_3^{(2)} = \theta^{(1)} = 2/5.$$

La nuova soluzione di base primale risulta essere

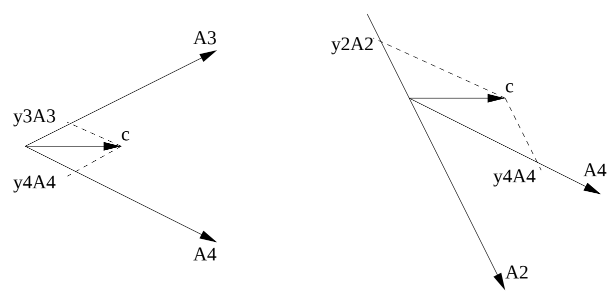
$$\bar{x}^{(2)} := A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -8/5 \end{bmatrix}.$$

Nuovamente, dalla figura si deduce che $\bar{x}^{(2)}$ non è ammissibile in quanto viola il vincolo 4; pertanto questo è l'indice entrante nella base. Formalmente:

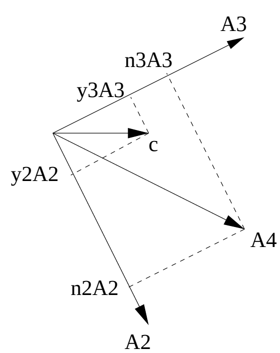
$$b_N - A_N \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14/5 \\ -8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28/5 \\ -16/5 \\ 14/5 \end{bmatrix},$$

$$k^{(2)} = 4.$$

È facile verificare che $\{3, 4\}$ è una base duale ammissibile mentre $\{2, 4\}$ non lo è, come illustrato dalla seguente figura.



Quindi, l'indice uscente deve essere 2. Ad ulteriore riprova, nella verifica geometrica del criterio del minimo rapporto risulta piuttosto evidente che $y_2/\eta_2 < y_3/\eta_3$.



Formalmente:

$$\bar{\eta}_B^{(2)} = (\bar{\eta}_3^{(2)}, \bar{\eta}_2^{(2)}) := A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(2)} = \min\{\bar{y}_i/\bar{\eta}_i \ : \ i \in B,\ \bar{\eta}_i > 0\} = \min\{2/3, 1/4\} = 1/4,$$
$$h^{(2)} = 2.$$

La nuova base è perciò
$$B^{(3)} = B^{(2)} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3, 4\}.$$

III^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base duale risulta essere

$$\bar{y}_B^{(3)} = (\bar{y}_3^{(3)}, \bar{y}_4^{(3)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(3)} = (\bar{y}_1^{(3)}, \bar{y}_2^{(3)}, \bar{y}_5^{(3)}) = (0, 0, 0).$$

Effettuiamo anche la verifica con l'altro metodo:

$$(\bar{y}_3^{(3)}, \bar{y}_2^{(3)}) = \bar{y}_B^{(2)} - \theta^{(2)}\bar{\eta}_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} - (1/4)\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_4^{(3)} = \theta^{(2)} = 1/4.$$

La nuova soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(3)} := A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalla figura si vede che $\bar{x}^{(3)}$ è ammissibile; infatti, risulta

$$b_N - A_N \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo quindi termina e $\bar{x} = [2, 0]$, $\bar{y} = [0, 0, 1/4, 1/4, 0]$ costituiscono la coppia di soluzioni (ottime) associate alla base ottima $B = \{3, 4\}$.