Soluzione esercizio 1.1.4

Per risolvere il problema basta determinare quali macchinari noleggiare. Infatti, se abbiamo noleggiato i macchinari i e j (con $j > i$) ma nessun altro tra i macchinari $i+1, ..., j-1$, tutti i capi di vestiario larghi al più a_j e almeno a_{i+1} dovranno essere tessuti utilizzando il macchinario j; anche i capi di larghezza al più a_i possono essere tessuti con lo stesso macchinario ma è meno costoso tesserli con il macchinario i poichè $C_i < C_j$. Quindi serviranno esattamente $D_{i+1} + ... + D_j$ rotoli di larghezza a_j.

Questa osservazione suggerisce come formulare il problema: per ogni coppia i, j con $i < j$ introduciamo x_{ij} la variabile decisionale che vale 1 se si noleggiano i macchinari i e j ma nessun altro tra i macchinari $i+1, ..., j-1$ e vale 0 altrimenti; si osservi che questa definizione ha perfettamente senso anche per $i = 0$ ($x_{0j} = 1$ significa che si è noleggiato il macchinario j ma nessun macchinario i con $i < j$). Le variabili così introdotte corrispondono agli archi del grafo orientato aciclico completo (N, A) dove

$$N = \{0, 1, ..., n\}, \qquad A = \{\ (i,j)\ :\ i < j,\ i = 0, ..., n,\ j = 1, ..., n\ \}.$$

Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $D_n > 0$ e di conseguenza il macchinario n deve essere comunque noleggiato. Quindi, ad ogni soluzione del nostro problema corrisponde un cammino orientato dal nodo 0 al nodo n e viceversa ad ogni siffatto cammino corrisponde una soluzione del nostro problema. Perciò, introducendo opportunamente i costi sugli archi, possiamo ricondurre il nostro problema alla determinazione del cammino da 0 ad n di costo minimo: se $x_{ij} = 1$, allora il costo relativo al macchinario j risulta essere la somma di K_j (costo di noleggio) e di $C_j(D_{i+1} + ... + D_j)$ (costo dei rotoli di larghezza a_j necessari); basta quindi porre $c_{ij} = C_j(D_{i+1} + ... + D_j) + K_j$. La formulazione del nostro problema come problema di cammino minimo è così completata:

$$\min \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i<j} x_{ij} - \sum_{i>j} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } \ i = 0 \\ \ \ 0 & \text{se } \ i = 1, ..., n-1 \\ \ \ 1 & \text{se } \ i = n \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Una formulazione alternativa, forse più intuitiva ma che conduce ad un problema di Programmazione Matematica più difficile da risolvere, è la seguente: sia y_j la variabile decisionale che vale 1 se si noleggia il macchinario j e vale 0 altrimenti e sia x_{ij} la variabile quantitativa che indica quanti rotoli di larghezza j verranno utilizzati per tessere capi di vestiario di larghezza al più a_i e maggiore di a_{i-1}; ovviamente bisogna considerare le variabili x_{ij} solo per le coppie di indici con $j \geq i$. Il costo totale per il noleggio dei macchinari è dato da

$$\sum_{j=1}^{n} K_j y_j.$$

Il costo di acquisto dei rotoli di larghezza j risulta essere

$$C_j \sum_{i \leq j} x_{ij}.$$

Quindi la funzione da minimizzare è data da

$$\sum_{j=1}^{n} (K_j y_j + C_j \sum_{i \leq j} x_{ij}).$$

Affinchè tutti i capi di vestiario vengano tessuti, deve essere

$$\sum_{j \leq i} x_{ij} = D_i \quad i = 1, ..., n.$$

Inoltre, capi di larghezza non superiore a j possono venir tessuti dal macchinario j solo se questi è stato noleggiato:

$$\sum_{i \leq j} x_{ij} \leq M y_j$$

dove M è una opportuna costante; ad esempio, si può scegliere il numero totale di rotoli necessari a confezionare tutti i capi di larghezza non superiore a j

$$M = \sum_{i \leq j} D_i.$$

Imponendo che le variabili x_{ij} siano interi non negativi, la formulazione è completa:

$$\begin{array}{ll}
\min \ \sum_{j=1}^{n} (K_j y_j + C_j \sum_{i \leq j} x_{ij}) & \\
\sum_{j \leq i} x_{ij} = D_i & i = 1, ..., n \\
\sum_{i \leq j} x_{ij} \leq (\sum_{i \leq j} D_i) y_j & j = 1, ..., n \\
x_{ij} \geq 0 & j \geq i, \quad i = 1, ..., n \\
x_{ij} \in \mathbb{Z} & j \geq i, \quad i = 1, ..., n \\
y_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n.
\end{array}$$