Soluzione esercizio 1.1.5

Introduciamo y_i come la variabile decisionale che vale 1 se l' impianto di produzione è aperto nel mese i (con $i = 1, ..., 12$) e che vale 0 se l'impianto rimane chiuso; dobbiamo determinare la quantità x_i di panettoni da produrre nel mese i e denotiamo con r_i la quantità di panettoni immagazzinata alla fine del mese i. La funzione da minimizzare è ovviamente data dalla somma dei costi di setup dell' impianto, dei costi di produzione e dei costi di immagazzinamento:

$$s\sum_{i=1}^{12} y_i + c\sum_{i=1}^{12} x_i + p\sum_{i=1}^{12} r_i.$$

Ovviamente la quantità di panettoni in magazzino in ciascun mese deve essere minore od uguale alla capacità del magazzino a disposizione in quel mese:

$$r_i \leq m_i, \quad i = 1, ..., 12.$$

Inoltre, la quantità in magazzino alla fine di un mese è uguale alla somma della quantità immagazzinata alla fine del mese precedente e della quantità prodotta nel mese corrente meno la quantità di panettoni immessi sul mercato:

$$r_{i+1} = r_i + x_{i+1} - d_{i+1}, \quad i = 1, ..., 11 \tag{1}$$

dove

$$r_0 = r_{12} = 0$$

in quanto il magazzino è vuoto all' inizio dell' anno e deve essere vuoto anche alla fine. Inoltre, è possibile produrre panettoni solo nei mesi in cui l' impianto è aperto:

$$x_i \leq M y_i, \quad i = 1, ..., 12$$

dove M è una costante molto grande, ad esempio una qualsiasi ragionevole limitazione superiore per la produzione annuale di panettoni; in realtà possiamo conoscere esattamente la produzione annuale grazie ai vincoli (1):

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_{11} + x_{12} - d_{12} = \\ &= r_{10} + x_{11} - d_{11} + x_{12} - d_{12} = \\ &\quad\vdots \\ &= r_0 + \sum_{i=1}^{12} (x_i - d_i). \end{aligned}$$

Essendo $r_0 = r_{12} = 0$, segue che

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{12} d_i$$

ovvero la produzione annuale è fissata; possiamo quindi scegliere

$$M = \sum_{i=1}^{12} d_i.$$

Imponendo che le quantità di panettoni prodotte e le quantità immagazzinate in ciascun mese siano non negative e che le prime siano numeri interi (non ha senso produrre frazioni di panettoni), la formulazione è così completa:

$$\min \quad s\sum_{i=1}^{12} y_i + c\sum_{i=1}^{12} x_i + p\sum_{i=1}^{12} r_i$$

$$\begin{array}{ll}
r_0 = r_{12} = 0 & \\
r_i \leq m_i & i = 1, ..., 11 \\
r_{i+1} = r_i + x_{i+1} - d_{i+1} & i = 0, ..., 11 \\
x_i \leq M y_i & i = 1, ..., 12 \\
x_i \geq 0 & i = 1, ..., 12 \\
r_i \geq 0 & i = 1, ..., 11 \\
x_i \in \mathbb{Z} & i = 1, ..., 12.
\end{array}$$