

Il Dipartimento di Informatica intende assegnare n diversi lavori di preparazione di pagine web a m ($m < n$) cooperative di studenti di Informatica. La cooperativa j , per effettuare il lavoro i , richiede al Dipartimento un pagamento di c_{ij} Euro, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Inoltre, per ragioni di riservatezza, per ogni lavoro i , $i = 1, \dots, n$, si conosce l'insieme $C(i)$ dei lavori che possono essere effettuati assieme ad i dalla stessa cooperativa (ovviamente, se $h \in C(i)$ allora $i \in C(h)$). Il Dipartimento intende assegnare i lavori delle pagine web alle cooperative al minimo costo con la garanzia di assegnare almeno un lavoro ad ogni cooperativa e facendo sì che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili. Formulare in termini di P.L.I. il problema del Dipartimento.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nm variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il lavoro } i \text{ è assegnato alla cooperativa } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento che garantiscono che ogni lavoro sia assegnato ad una ed una sola cooperativa sono:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per garantire che ad ogni cooperativa sia assegnato almeno un lavoro, introduciamo i seguenti vincoli di copertura:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Per garantire che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili tra loro (lavori che possono essere effettuati assieme), definiamo, come struttura di dati in input, l'insieme L di tutte le coppie di lavori incompatibili, cioè lavori che non possono essere assegnati alla stessa cooperativa:

$$L = \{(i, h) : i = 1, \dots, n-1, h > i \text{ e } h \notin C(i)\};$$

(la condizione $h > i$ viene utilizzata per evitare di inserire in L la stessa coppia due volte). Mediante l'insieme L delle coppie incompatibili, possiamo garantire che alla stessa cooperativa siano assegnati solo lavori compatibili in quanto si impedisce di assegnare alla stessa cooperativa coppie di lavori incompatibili:

$$x_{ij} + x_{hj} \leq 1, \quad (i, h) \in L, \quad j = 1, \dots, m.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}.$$

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1 \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \quad (i, h) \in L, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$