

## Logica Fuzzy e linguaggio naturale



Egidio Falotico

## La logica Fuzzy

- \* **Fuzzy**: sfocato, indistinto, non precisamente definito.
- \* La logica fuzzy serve per rappresentare e trattare concetti o informazioni espressi in **forma qualitativa**
- \* **Descrizione linguistica**: regole espresse mediante rappresentazione linguistica
- \* Esempio di rappresentazione fuzzy, comportamento di un autista quando si avvicina ad un semaforo rosso:  
SE la velocità è **bassa** ALLORA frena **dolcemente**  
SE la velocità è **media** ALLORA frena **gradatamente**  
SE la velocità è **alta** ALLORA frena con **decisione**

## La logica Fuzzy

- \* Il sistema **fuzzy** ha due caratteristiche principali che lo distinguono:
  - I sistemi fuzzy sono sistemi basati sulla conoscenza, espressi in forma **linguistica**.
  - I sistemi fuzzy sono funzioni non lineari tra i vettori di ingresso e uscita, che possono essere descritte utilizzando formule matematiche.
- \* La conoscenza umana e l'esperienza sono fondamentali nel progetto di sistemi fuzzy.

## La logica Fuzzy

- \* La logica fuzzy fornisce un supporto semantico che dà un unico e preciso significato all'algoritmo linguistico.
- \* **Basi della teoria**:
  - **Insiemi fuzzy**: traduzione di grandezze misurate in variabili linguistiche (**fuzzyficazione**)  
viceversa (**defuzzyficazione**)
  - **Proposizione fuzzy**: uso di variabili linguistiche  
Costituisce un ponte tra i modelli espressi secondo regole linguistiche e l'implementazione matematica: è una procedura formale per tradurre una raccolta di conoscenze in una funzione non lineare.

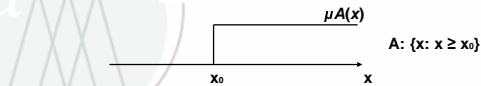
## Insieme Crisp

- Nella teoria classica un insieme *crisp* (chiaro, ben definito)  $A$  è una collezione di oggetti  $x$  presi in un insieme universale  $U$ .
- Si definisce *membership* (funzione caratteristica o funzione di appartenenza)

$$\mu_A : x \in U \rightarrow \{0, 1\}$$

che dichiara quali elementi di  $U$  appartengono all'insieme e quali no:

$$x \in A \Rightarrow \mu_A(x) = 1 \text{ altrimenti } \mu_A(x) = 0$$



## Insiemi fuzzy

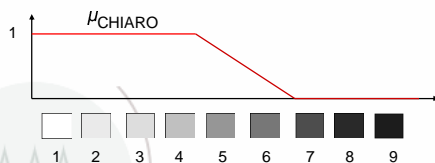
- La teoria degli insiemi fuzzy introduce un nuovo paradigma che **estende il concetto di insieme crisp**, riferendosi agli elementi che parzialmente appartengono ad un insieme.
- Quando  $A$  è un insieme fuzzy, la proposizione "x è un membro di  $A$ " non è necessariamente vera o falsa, ma se può essere vera solo **parzialmente**.
- La proposizione "x è un membro di  $A$ " è vera con un grado di certezza che varia da 0 a 1.

Si indica questo grado di certezza con l'acronimo **DOF**: *degree of fulfillment*.

- La logica convenzionale è un caso particolare di logica fuzzy: DOF assume solo i valori estremi: 0, 1.

## Insiemi fuzzy: esempio

- La funzione indica quali rettangoli appartengano all'insieme dei rettangoli chiari



## Insiemi fuzzy

- E' quindi ora possibile dare la definizione formale di insieme fuzzy:

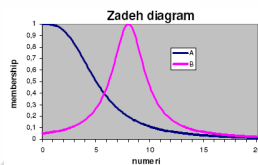
- **Insieme fuzzy**

Sia  $U$  uno spazio di elementi  $x$ . Un insieme fuzzy  $A$  è definito dall'insieme delle coppie

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U, \mu_A(x) : U [0, 1]\}$$

- La funzione  $\mu_A(x)$  esprime, per ogni valore di  $x$ , il DOF di "x è un membro di  $A$ "
- La funzione  $\mu_A(x)$  è nota come *membership* (funzione di appartenenza o funzione caratteristica).
- Lo spazio  $U$  è anche chiamato *Universo del discorso*

## La funzione membro: rappresentazione grafica



Il grafico che mostra l'andamento della funzione membro è noto con il nome di **diagramma di Zadeh**.

In figura è riportato un esempio di tale diagramma dove sono rappresentate due funzioni

A (numeri piccoli)  
B (circa 8)

### Nota:

A="numeri piccoli" B="circa 8"

Sono caratteristiche numeriche descritte in termini linguistici

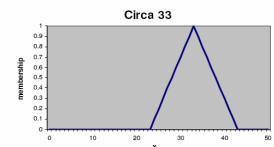
## Funzione di membership triangolare

✘ E' la più utilizzata nella pratica. E' definita da tre parametri [a b c] dove:

- a rappresenta il valore di x prima del quale la membership ha valore 0;
- b è il vertice nel quale la membership ha valore 1
- c è l'estremo destro dal quale la membership torna ad essere 0.

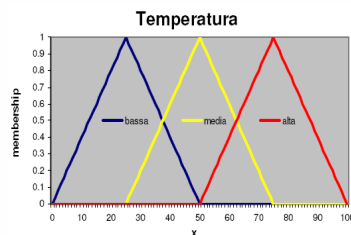
Esempio di funzione di membership triangolare per la proposizione "x è circa 33" definita nell'universo

$x \in [0, 50]$ ; [a b c]=[23 33 43].



## Fuzzyficazione e Defuzzyficazione

✘ La **fuzzyficazione** è il processo di costruzione di un insieme fuzzy a partire da valori di una data variabile (es. temperatura della acqua di una caldaia)



✘ La **defuzzyficazione** serve per trasformare un insieme fuzzy in un valore numerico

- Sono disponibili due possibilità: **metodo del massimo** e **metodo del centro di gravità**

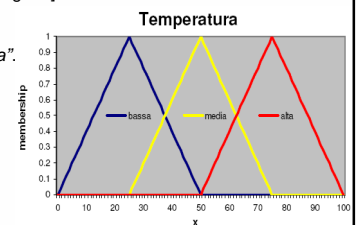
## Defuzzyficazione e metodo del centro di gravità (1)

Un esempio...

✘ La temperatura dell'acqua in una caldaia può essere espressa tramite una variabile linguistica definita nell'universo "temperatura dell'acqua = [0,100gradi]"

✘ La temperatura può assumere i valori: "bassa", "media" o "alta".

✘ Una specifica condizione di funzionamento (T=72°C) è esprimibile come: "bassa" con membership 0 "media" con membership 0.2 "alta" con membership 0.8

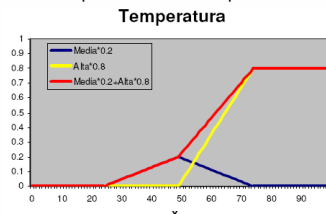


✘ Come si può esprimere questa informazione con un valore numerico? Si può adottare il cosiddetto metodo del **centro di gravità**:

## Defuzzyficazione e metodo del centro di gravità (1)

Un esempio...

1. Si considera la funzione di membership di "bassa" e si moltiplica per il DOF di "bassa" (0)
2. Si considera la funzione di membership di "media" e si moltiplica per il DOF di "media" (0.2)
3. Si considera la funzione di membership di "alta" e si moltiplica per il DOF di "alta" (0.8)
4. Si sommano le tre funzioni così ottenute.
5. Il baricentro di tale funzione coincide con il valore numerico desiderato (76.5 °C)



## Proposizione fuzzy

- ✘ La differenza fondamentale fra una proposizione classica e quella fuzzy è l'insieme dei valori che rendono vera la proposizione stessa.
- ✘ Le classiche proposizioni logiche possono essere vere o false, mentre la veridicità o la non veridicità delle proposizioni fuzzy è una supposizione di grado (DOF).

Forma semplice (atomica) di una proposizione (p):

**Proposizione, p:  $\chi$  è A**

Per una proposizione fuzzy:

- A è un insieme fuzzy all'interno di un universo U
- $\chi$  è un oggetto che ha senso in U.

## Proposizione fuzzy

Proposizione, p:  $\chi$  è A

- ✘ **Esempio:** "Fabrizio è giovane" è un'affermazione in cui l'oggetto Fabrizio ha un attributo che ha significato nell'universo età.
- ✘ Nel caso fuzzy, è necessario specificare l'insieme fuzzy, cioè:
  - L'insieme dei valori per cui la proposizione p ha senso.
  - Il grado di veridicità della proposizione p, in funzione di  $\chi$
- ✘ In altre parole, è necessario individuare l'intervallo di età affinché Fabrizio possa essere considerato giovane e in che misura l'affermazione corrisponda a verità.

## Proposizione fuzzy

- ✘ La proposizione fuzzy utilizza **variabili linguistiche**. Si è portati ad utilizzare valori linguistici per due ragioni principali:
- ✘ **L'uomo elabora meglio concetti espressi con valori linguistici**  
Esempio, "se l'automobile è veloce allora bisogna sollevare il piede dall'acceleratore".
- ✘ **I valori linguistici condensano in una sola parola più informazioni, fra loro equivalenti per quanto concerne la reazione umana.**  
Esempio, "se l'automobile è veloce allora bisogna sollevare il piede dall'acceleratore" il fatto che l'attuale velocità sia 101 km/h piuttosto che 100 km/h è del tutto irrilevante.
- ✘ Perciò è di importanza fondamentale definire una metodologia per strutturare informali leggi linguistiche.

## Variabile linguistica

- Una variabile linguistica è una variabile che ha come valori **attributi linguistici**, cioè parole utilizzate nel linguaggio comune.

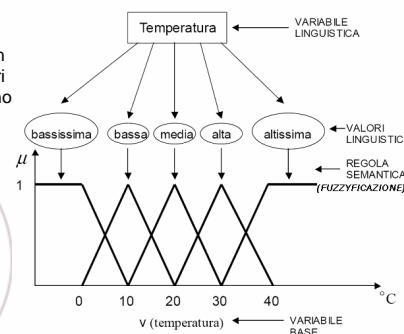
**Valori = attributi linguistici**

- Il concetto è caratterizzato attraverso insiemi fuzzy definiti nell'universo all'interno del quale la variabile assume significato:
- Un insieme fuzzy per ogni valore (attributo linguistico)
- La variabile viene **fuzzyficata** indicando il grado di soddisfacimento (o DOF, degree of fulfillment) di ogni attributo.

## Variabile linguistica

- Una variabile linguistica è definita in termini di una **variabile base** (variabile in senso classico), i cui valori sono numeri reali all'interno di un dato intervallo.

- Una variabile linguistica è definita attraverso i suoi **termini primari** (rappresentati in figura). I termini primari sono etichette di insiemi fuzzy: 'bassissima', 'bassa', 'media', 'alta' e 'altissima'.



## Variabile linguistica (definizione di Zadeh)

- Una variabile linguistica è definita come una quintupla,

$$\{x, T(x), U, G, M\}$$

dove:

- $x$  è il nome della variabile
- $T(x)$  è l'insieme dei nomi (o termini) dei valori linguistici della variabile  $x$
- $U$  è l'universo del discorso
- $G$  è la regola sintattica che genera i nomi in  $T(x)$
- $M$  è la regola semantica che assegna a ciascun nome il suo significato, cioè un insieme fuzzy

Per chiarire una definizione apparentemente così astratta, si considera come esempio un ragionamento sull'anzianità o meno di un uomo a partire dalla sua età:

## Variabile linguistica (definizione di Zadeh)

*Chiarimenti...*

- il **nome** della variabile linguistica è ovviamente  $x$ =età
- l'**universo del discorso**  $U$  è un range di variabilità dei valori di  $x$ , ad esempio  $U=[0,100]$
- un **insieme di nomi** per  $x$  può essere  $T(x)$ =(vecchio, molto vecchio, giovane, molto giovane)
- la **regola**  $G$  che genera i nomi è ottenuta applicando agli atomi "giovane" e "vecchio" i **modificatori linguistici**

- $M$  è una **regola** che assegna a ciascun termine un insieme fuzzy; per il termine vecchio la regola potrebbe essere definita come segue:

$$M(\text{vecchio}) = \{(x, \mu_v(x)) : x \in U\}, \text{dove } \mu_v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 50 \\ \left[1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{se } x > 50 \end{cases}$$

per altri termini la funzione di appartenenza sarà ovviamente differente.

## Modificatori Linguistici

- ✳ Sono **avverbi** del linguaggio naturale, come "molto", "abbastanza", "leggermente", ecc. e modificano i termini in  $T(x)$  e i relativi insiemi fuzzy che ne determinano il significato.
- ✳ Le modifiche avvengono applicando dei modelli matematici al grado di appartenenza  $A$  assunto dal termine in assenza di modificatori.
- ✳ Esempi di modificatori diffusi nel ragionamento fuzzy sono:
  - operatore di concentrazione
  - operatore di dilatazione
  - intensificatore di contrasto
- Nel caso di più modificatori applicati ad uno stesso termine, vale la seguente gerarchia per le precedenze:
  - not e modificatore fuzzy
  - and
  - or

## Operatore di concentrazione

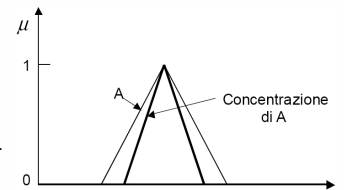
- ✳ Gli operatori di concentrazione sono così chiamati perché rendono più **restrittiva** la funzione di appartenenza (*riduzione dell'incertezza*).

$$f_{Molto(A)}(x) = f_A^2(x)$$

$$f_{Estremamente(A)}(x) = f_A^3(x)$$

$$Molto(A) \subseteq A$$

- ✳ Più basso è il valore di appartenenza di un elemento ad un insieme fuzzy, più è ridotta la sua appartenenza mediante una concentrazione.

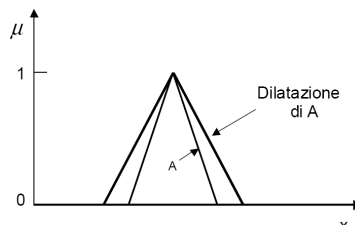


## Operatore di dilatazione

- ✳ I modificatori di dilatazione **aumentano** il grado di appartenenza di un elemento ad un insieme

$$f_A \subseteq f_{Abbastanza(A)} \quad f_{Abbastanza(A)}(x) = \sqrt{f_A(x)}$$

- ✳ Funzione opposta a quella degli intensificatori: creano **sovrainsiemi** di insiemi dati



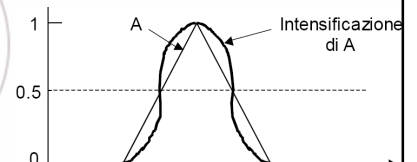
## Intensificatore di contrasto

- ✳ L'intensificatore di contrasto incrementa il grado di appartenenza degli elementi il cui valore di appartenenza originale è  $> 0.5$  e diminuisce il grado di appartenenza degli elementi il cui valore di appartenenza originale è  $< 0.5$ .

$$f_{sicuramente(A)}(x) = \begin{cases} 2f_A^2(x), & \text{se } f_A(x) \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2 \cdot (1 - f_A(x))^2, & \text{se } f_A(x) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- ✳ L'intensificatore di contrasto avvicina gli estremi di un insieme fuzzy ai valori 1 e 0

**Proprietà intensificatore**  
Sia  $A' = Sicuramente(A)$ ,  
si ha:  
 $A' \cap \neg A' \subseteq A \cap \neg A$   
 $A \cup \neg A \subseteq A' \cup \neg A'$



## Altri modificatori

### ✘ Modificatori di approssimazione

Trasformano un insieme "singoletto" (vale sempre 0 tranne in un punto, dove vale 1) in una funzione a campana

- Se applicato ad un insieme fuzzy, ne produce uno con una regione più ampia

### ✘ Modificatore "Esattamente"

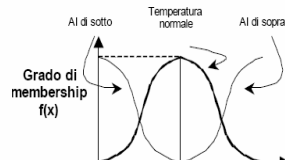
Effetto opposto a quello dei modificatori di approssimazione

Usato per trasformare insiemi fuzzy a campana in un singoletto

### ✘ Modificatori di restrizione

inferiore a, superiore a, al di sopra di, ...

Cambiano radicalmente la forma della funzione di appartenenza.



## Perché la logica fuzzy per il linguaggio naturale

- ✘ Potente strumento per la rappresentazione del linguaggio naturale, riesce a trattare la vaghezza che lo caratterizza.

- Esempi di concetti fuzzy:

bello  
giovane  
vicino  
alto  
– ....  
Ma anche  
– Molto alto  
– Sicuramente giovane  
– Circa vicino  
– ....

## Bibliografia

- Beatrice Lazzerini , Introduzione agli Insiemi Fuzzy e alla logica Fuzzy.
- Patyra M.J. Fuzzy logic: implementation and application. Wiley/Teubner, 1997.
- Jerry M. Mendel, Fuzzy Logic Systems for Engineering: A tutorial.
- M Veronesi A. Visioli, Logica Fuzzy. Fondamenti teorici e applicazioni pratiche. FrancoAngeli,2003.
- Lotfi A. Zadeh ,Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh. George J. Klir/Bo Yuan,1996.

## Sitografia

Introduzione alla logica fuzzy ed al controllo fuzzy  
Antonio Visioli

Dipartimento di Elettronica per l'Automazione,  
Facoltà di Ingegneria,  
Università degli Studi di Brescia

<http://bsing.ing.unibs.it/~visioli/didattica/parte5.pdf>

Tecniche per il trattamento dell'incertezza: Teoria dei fuzzy set  
Laboratorio di intelligenza artificiale,  
Università degli studi di Milano Bicocca

[http://www.lintar.disco.unimib.it/Aelem/Lessons/PR\\_FUZZY\\_2.pdf](http://www.lintar.disco.unimib.it/Aelem/Lessons/PR_FUZZY_2.pdf)