

ESERCITAZIONE

Grammatiche Context-free e Teorema di Ricorsione

- **Esercizio**

Dato l'alfabeto $\Lambda = \{0, 1, 2, 3\}$ definire il linguaggio \mathcal{L} tale che

$$\mathcal{L} = \{\alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in \Lambda, n > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \equiv 0 \pmod{3}\}$$

Soluzione

$$S \rightarrow 0 \mid 3 \mid 0S \mid 3S \mid 1A \mid 2B$$

$$A \rightarrow 2 \mid 0A \mid 3A \mid 2S \mid 1B$$

$$B \rightarrow 1 \mid 0B \mid 3B \mid 1S \mid 2A$$

- **Esercizio**

Data la grammatica G :

$$S \rightarrow () \mid (S) \mid SS$$

(a) Dimostrare che G é ambigua;

(b) Definire una grammatica G' non ambigua che generi lo stesso linguaggio di G .

Soluzione

(a) Per la stringa “ $()()()$ ” esistono due differenti alberi di derivazione:

$$S \rightsquigarrow SS \rightsquigarrow ()S \rightsquigarrow ()SS \rightsquigarrow ()()S \rightsquigarrow ()()()$$

$$S \rightsquigarrow SS \rightsquigarrow S() \rightsquigarrow SS() \rightsquigarrow ()S() \rightsquigarrow ()()()$$

(b) Definiamo G' tale che:

$$S \rightarrow A \mid AS$$

$$A \rightarrow () \mid (S)$$

- **Esercizio**

Dato l'alfabeto $\Lambda = \{a, b, c\}$ definire il linguaggio \mathcal{L} delle stringhe palindrome (i.e. “ a ”, “ aa ”, “ b ”, “ bb ”, “ aba ”, ...) tale che:

$$\mathcal{L} = \{\alpha\beta\alpha^R \mid \alpha \in \Lambda^*, \beta \in \Lambda \cup \{\epsilon\}\}$$

Soluzione

Usando nella grammatica la stringa vuota

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid cSc \mid T$$

$$T \rightarrow a \mid b \mid c \mid \epsilon$$

Senza utilizzare la stringa vuota

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid bSb \mid cSc \mid T \\ T &\rightarrow a \mid b \mid c \mid aa \mid bb \mid cc \end{aligned}$$

• **Esercizio**

Dato il linguaggio \mathcal{L} tale che:

$$\mathcal{L} = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m > 0\}$$

- (a) definire una grammatica G che genera \mathcal{L} ;
- (b) applicare i primi passi del Teorema di Ricorsione a G .

Soluzione

(a) Definiamo G nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid aAc \\ A &\rightarrow bc \mid bAc \end{aligned}$$

(b) Ricordiamo la definizione di concatenazione di due linguaggi A e B come

$$AB = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$$

ed applichiamo il Teorema di Ricorsione. La grammatica G si traduce nella seguente definizione ad insiemi:

$$\begin{aligned} S^{i+1} &= \{a\}S^i\{c\} \cup \{a\}A^i\{c\} \\ A^{i+1} &= \{b\}\{c\} \cup \{b\}A^i\{c\} \end{aligned}$$

Applichiamo i primi passi del teorema:

$$\begin{aligned} S^0 &= A^0 = \{\} \\ S^1 &= \{a\}S^0\{c\} \cup \{a\}A^0\{c\} = \{\} \\ A^1 &= \{b\}\{c\} \cup \{b\}A^0\{c\} = \{bc\} \\ S^2 &= \{a\}\{\}\{c\} \cup \{a\}\{bc\}\{c\} = \{abcc\} \\ A^2 &= \{b\}\{c\} \cup \{b\}\{bc\}\{c\} = \{bc, bbcc\} \\ &\dots \end{aligned}$$

• **Esercizio**

Dato il linguaggio \mathcal{L} tale che:

$$\mathcal{L} = \{a^n cb^k \mid n > k, k \geq 0\}$$

- (a) definire una grammatica G che genera \mathcal{L} ;
- (b) applicare i primi passi del Teorema di Ricorsione a G .

Soluzione

(a) Definiamo G nel seguente modo:

$$S \rightarrow ac \mid aS \mid aSb$$

(b) In accordo alla definizione di concatenazione di linguaggi richiamata nell'esercizio precedente applichiamo il Teorema di Ricorsione. La grammatica G si traduce nella seguente definizione ad insiemi:

$$S^{i+1} = \{a\}\{c\} \cup \{a\}S^i \cup \{a\}S^i\{b\}$$

Applichiamo i primi passi del teorema:

$$\begin{aligned}S^0 &= \{\} \\S^1 &= \{a\}\{c\} \cup \{a\}S^0 \cup \{a\}S^0\{b\} = \{ac\} \\S^2 &= \{a\}\{c\} \cup \{a\}\{ac\} \cup \{a\}\{ac\}\{b\} = \{ac, aac, aacb\} \\S^3 &= \{ac, aac, aaac, aaacb, aacb, aaacb, aaacbb\} \\&\dots\end{aligned}$$

• **Esercizio**

Dato il linguaggio \mathcal{L} tale che:

$$\mathcal{L} = \{a^k c^{k+n} b^n \mid k, n > 0\}$$

definire una grammatica G che genera \mathcal{L} .

Soluzione

Definiamo G nel seguente modo:

$$\begin{aligned}S &\rightarrow AB \\A &\rightarrow ac \mid aAc \\B &\rightarrow bc \mid bBc\end{aligned}$$

• **Esercizio**

Data una grammatica $G = (\Lambda, V, S, P)$ ed il suo linguaggio generato \mathcal{L}_G , definire una nuova grammatica G' che generi il linguaggio $\mathcal{L}_{G'}$ tale che:

$$\mathcal{L}_{G'} = \{\alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in \mathcal{L}_G, n > 0\}.$$

Soluzione

Definiamo G' come estensione di G nel seguente modo:

$$G' = (\Lambda, V \cup \{S'\}, S', P \cup P')$$

con $S' \notin V$. Le nuove produzioni di G' rispetto a G sono:

$$P' = \{S' \rightarrow S \mid SS'\}.$$