Proprietà dei linguaggi liberi da contesto

Proprietà di CFL

- **Pumping Lemma per CFL**: simile ai linguaggi regolari.
- **Proprietà di chiusura**: alcune delle proprietà di chiusura dei linguaggi regolari valgono anche per i CFL.
- **Proprietà di decisione**: possiamo controllare l'appartenenza e l'essere vuoto, ma, per esempio, l'equivalenza di CFL è indecidibile.

Forma normale di Chomsky

Ogni CFL (senza ϵ) è generato da una CFG dove tutte le produzioni sono della forma

$$A \to BC, \text{ o } A \to a$$

dove A, B, e C sono variabili, e a è un simbolo terminale. Questa è detta **forma normale di Chomsky (CNF)**. È possibile ottenerla. In particolare è necessario

1. eliminare i **simboli inutili**, quelli che non appaiono in nessuna derivazione $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, per simbolo iniziale S e terminale w.
2. eliminare le produzioni ϵ, della forma $A \to \epsilon$.
3. eliminare le **produzioni unità**, cioè produzioni della forma $A \to B$, dove A e B sono variabili.
4. eliminare le produzioni con più di due nonterminali sulla destra.

Esempio

Iniziamo dalla grammatica delle espressioni, a cui abbiamo tolto le produzioni unitarie.
$E \to E + T \mid T * F \mid (E) \mid a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$
$T \to T * F \mid (E) \mid a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$
$F \to (E) \mid a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$
$I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$
Aggiungiamo le produzioni
$A \to a, B \to b, Z \to 0, O \to 1$
$P \to +, M \to *, L \to (, R \to)$
e otteniamo la grammatica
$E \to EPT \mid TMF \mid LER \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$T \to TMF \mid LER \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$F \to LER \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$I \to a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$A \to a, B \to b, Z \to 0, O \to 1$
$P \to +, M \to *, L \to (, R \to)$

Per eliminare parti destre con più di 2 nonterminali, rimpiazziamo

- $E \rightarrow EPT$ con $E \rightarrow EC_1$, $C_1 \rightarrow PT$
- $E \rightarrow TMF$, $T \rightarrow TMF$ con
  $E \rightarrow TC_2$, $T \rightarrow TC_2$, $C_2 \rightarrow MF$
- $E \rightarrow LER$, $T \rightarrow LER$, $F \rightarrow LER$ con
  $E \rightarrow LC_3$, $T \rightarrow LC_3$, $F \rightarrow LC_3$, $C_3 \rightarrow ER$

La grammatica in CFN finale è

$E \rightarrow EC_1 \mid TC_2 \mid LC_3 \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$T \rightarrow TC_2 \mid LC_3 \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$F \rightarrow LC_3 \mid a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$I \rightarrow a \mid b \mid IA \mid IB \mid IZ \mid IO$
$C_1 \rightarrow PT, C_2 \rightarrow MF, C_3 \rightarrow ER$
$A \rightarrow a, B \rightarrow b, Z \rightarrow 0, O \rightarrow 1$
$P \rightarrow +, M \rightarrow *, L \rightarrow (, R \rightarrow)$

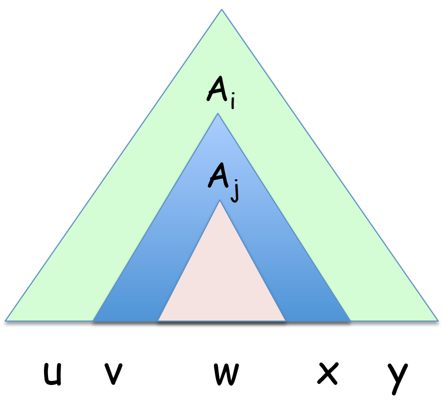
Pumping lemma per CFL

- **Informalmente**:
  In ogni stringa sufficientemente lunga di un CFL si possono trovare due sottostringhe brevi e vicine che è possibile eliminare o ripetere (insieme), ottenendo sempre stringhe del linguaggio.
- **Formalmente**:
  Sia L un CFL. Esiste una costante n tale che, se $z \in L$ e $\mid z \mid \geq n$, possiamo scrivere $z = uvwxy$ con le seguenti condizioni:
  1. $\mid vwx \mid \leq n$
  2. $vx \neq \epsilon$ (almeno una delle due è diversa da ϵ)
  3. per ogni $i \geq 0$, $uv^iwx^iy \in L$.

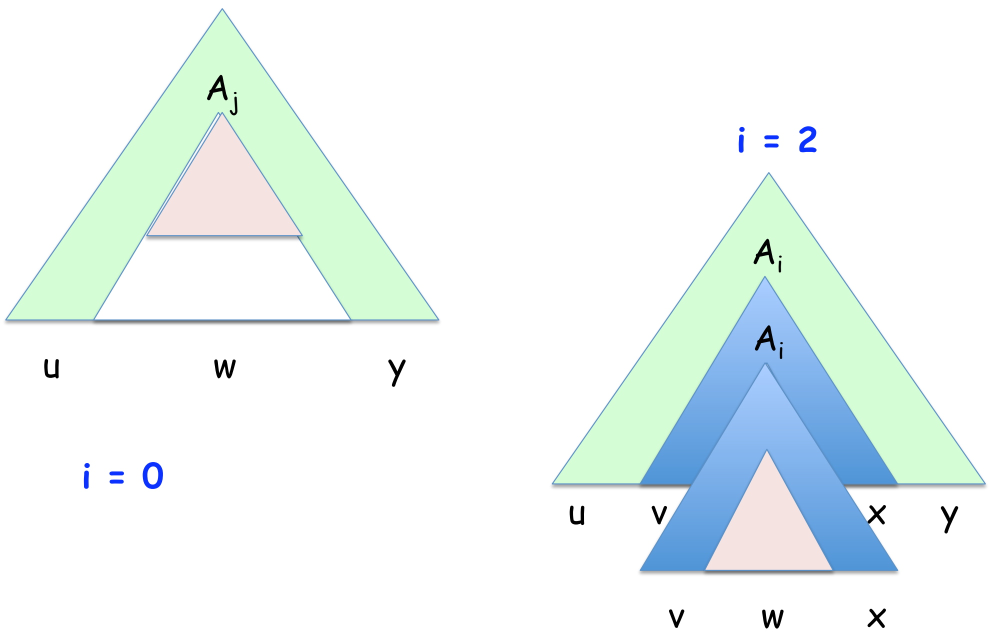
Dimostrazione informale

- Se la stringa w è sufficientemente lunga, l'albero sintattico che produce $w = uvwxy$ ha un simbolo non terminale che si ripete in un cammino dalla radice ad una foglia. Supponiamo $A_i = A_j$.
- Allora può essere individuato il sottoalbero con radice A_j (in rosa nella figura) e chiamato w il suo prodotto.
- Inoltre, dato il sottoalbero con radice A_i (in azzurro nella figura), chiamiamo vwx il suo prodotto.
- Dato che $A_i = A_j$, possiamo rimpiazzare il sottoalbero di A_i con quello di A_j, ottenendo quindi uwy ($i = 0$), che deve ancora appartenere a L.
- Oppure possiamo rimpiazzare il sottoalbero di A_j con quello di A_i, ottenendo $uvvwxxy$ ($i = 2$), ancora generata da L, e così via per ogni i.

Albero sintattico nel pumping lemma



Pumping up and down



Dimostrazione formale

- Sia G una grammatica libera in Forma Normale di Chomsky, t.c. $L(G) = L \setminus \{\epsilon\}$, e m il numero dei non terminali in G. Scegliamo n come 2^m e supponiamo che z sia lunga almeno n.
- Un albero sintattico il cui cammino più lungo sia lungo m, o meno, ha un prodotto di lunghezza $2^{m-1} = n/2$, o meno.
- Un albero siffatto non può avere z come prodotto, in quanto troppo lunga. Quindi ogni albero con prodotto z deve avere un cammino di lunghezza almeno $k \geq m + 1$.
- Essendoci non più di m non terminali, almeno due nel cammino lungo più di $m + 1$ devono ripetersi. Supponiamo $A_i = A_j$ (where $k - m \leq i < j \leq k$).
- Allora possiamo "pompare" l'albero come uv^0wx^0y o come uv^2wx^2, e in generale come uv^iwx^iy, $i \geq 0$.
- Dato che il cammino più lungo nel sottoalbero in A_i è al più $m + 1$, abbiamo che $|vwx| \leq 2^m = n$.

Esempio

- Consideriamo $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$.
- Dato un n generico, scegliamo $z = 0^n 1^n 2^n$.
- Comunque noi spezziamo z in $uvwxy$, con $\mid vwx \mid \leq n$ e v e x non entrambi vuote, vwx non può contenere sia 0 che 2 perché l'ultimo 0 e il primo 2 sono lontani n+1 posti.
- Ci sono i seguenti casi:
  - vwx non contiene 2. Allora vx ha solo 0 e 1. Quindi uwy, che dovrebbe essere in L, ha n 2, ma meno di n 0 o 1.
  - vwx non contiene 0. Analogo.

Esempi

- I CFL non sanno abbinare coppie con lo stesso numero di simboli, se le coppie sono intrecciate.
  - Esempio: $L = \{0^i 1^j 2^i 3^j \mid i, j \geq 1\}$.
  - Dato n, scegliamo $z = 0^n 1^n 2^n 3^n$. Quindi vwx contiene un solo simbolo o due simboli. In ogni caso, le stringhe generate non sono in L.
- I CFL non sanno abbinare due stringhe di lunghezza arbitraria, se sono su un alfabeto di più di un simbolo.
  - Esempio: $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.
  - Dato n, scegliamo $z = 0^n 1^n 0^n 1^n$. Comunque la scomponiamo, non otteniamo stringhe di L.

Proprietà di chiusura dei CFL

Teorema 7.24: I CFL sono chiusi sotto

- unione,
- concatenazione,
- chiusura di Kleene e chiusura positiva $+$

Basta mettere insieme le grammatiche:

- per l'unione: $S \rightarrow A \mid B$
- per la concatenazione: $S \rightarrow AB$
- per la chiusura di Kleene: $S \rightarrow SA \mid \epsilon$
- per la chiusura positiva: $S \rightarrow SA \mid A$

Chiusura rispetto all'inversione

Teorema: Se L e CF, allora lo è anche anche L^R.
Prova: Supponiamo che L sia generato da $G = (V, T, P, S)$.
Costruiamo $G^R = (V, T, P^R, S)$, dove

$$P^R = \{A \rightarrow \alpha^R : A \rightarrow \alpha \in P\}$$

Si mostra per induzione sulla lunghezza delle derivazioni in G e in G^R che $(L(G))^R = L(G^R)$.

I CFL non sono chiusi sotto l'intersezione

Sia $L_1 = \{0^n 1^n 2^i : n \geq 1, i \geq 1\}$. Allora L_1 è libero da contesto, con grammatica

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow 0A1|01 \\ B &\rightarrow 2B|2 \end{aligned}$$

Inoltre, $L_2 = \{0^i 1^n 2^n : n \geq 1, i \geq 1\}$ è libero da contesto, con grammatica

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow 0A|0 \\ B &\rightarrow 1B2|12 \end{aligned}$$

Invece, $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 1\}$ non è CF.

Intersezione tra CFL e linguaggi regolari

Si può dimostrare il seguente teorema.
Teorema 7.27: Se L è CF, e R è regolare, allora $L \cap R$ è CF.

Teorema 7.29: Siano L, L_1, L_2 CFL e R regolare. Allora

1. $L \setminus R$ è CF
2. $\bar{L}$ non è necessariamente CF
3. $L_1 \setminus L_2$ non è necessariamente CF

Prova:

1. $\bar{R}$ è regolare, $L \cap \bar{R}$ è regolare, e $L \cap \bar{R} = L \setminus R$.
2. Se $\bar{L}$ fosse sempre CF, seguirebbe che

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

   sarebbe sempre CF.
3. Notare che Σ^* è CF, quindi se $L_1 \setminus L_2$ fosse sempre CF, allora lo sarebbe sempre anche $\Sigma^* \setminus L = \bar{L}$.

Problemi indecidibili per linguaggi liberi da contesto

I seguenti problemi sono indecidibili (cioè non esiste nessun algoritmo che possa risolverli):

1. Data G, è ambigua?
2. È un dato CFL inerentemente ambiguo?
3. É l'intersezione di due CFL vuota?
4. Dati due CFL, sono uguali?
5. Dato un CFL, è uguale a Σ^*?

Alcuni esercizi di riepilogo

1. Dimostrare che $L = \{0^n \; n = k^2, k > 0\}$ non è regolare.
2. Applicando il Pumping Lemma a un linguaggio regolare "vince l'avversario" e non si può finire la dimostrazione. Dove fallisce nei casi $L = \emptyset$ e $L = \{00, 11\}$.
3. Scrivere la grammatica libera per generare il linguaggio:

$$\{a^i b^j c^k | i \neq j \text{ o } j \neq k\}$$

4. Data la gramatica libera G definita dalle produzioni $S \to aS|aSbS|\epsilon$: (i) dimostrare che è ambigua; (ii) trovare una grammatica per lo stesso linguaggio che non lo sia.
5. Dimostrare che $L = \{a^i b^j c^k | i < j < k\}$ non è libero.