

Diploma in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

19/9/2000

Esercizio 1 Si vuole approssimare l'integrale

$$\int_0^1 x \, dx$$

con la formula dei trapezi, suddividendo l'intervallo di integrazione in $N = 9$ parti. I calcoli vengono svolti operando in $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(2,3,m,M)}$ con troncamento. I nodi $z_k = k/9$ possono essere calcolati con i due possibili algoritmi:

a) $\tilde{h} = \text{trn}(1/9)$, $\tilde{z}_0 = 0$, $\tilde{z}_k = \tilde{z}_{k-1} \oplus \tilde{h}$, per $k = 1, \dots, 9$.

b) $\tilde{z}_0 = 0$, $\tilde{z}_k = \text{trn}(k/9)$, per $k = 1, \dots, 9$.

Si verifichi che i due insiemi di nodi non coincidono. Si applichi la formula dei trapezi operando in \mathcal{F} sui due insiemi di nodi. Quale dei valori ottenuti ha l'errore minore?

Esercizio 2 Si considerino le due equazioni

$$\begin{aligned} x &= g_1(x), & g_1(x) &= 2 + \log x, \\ x &= g_2(x), & g_2(x) &= e^{x-2}. \end{aligned}$$

a) Si dica se sono equivalenti.

b) Si studi la convergenza dei due metodi iterativi

$$x_{i+1} = g_1(x_i), \quad \text{e} \quad x_{i+1} = g_2(x_i).$$

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se esistono valori reali di α per cui

a) A ha un solo autovalore reale.

b) A ha un autovalore negativo e due autovalori positivi.

c) A ha un autovalore positivo e due autovalori negativi.

d) il metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare con matrice A sia convergente.

Esercizio 4 Sia A la matrice reale di ordine $n > 4$ così definita:

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{per } i = j, \\ \beta & \text{per } i = j + 3, \\ \gamma & \text{per } i = j - 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0.$$

Si dica qual è il costo computazionale della risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ con il metodo di Gauss, nell'ipotesi che non siano richiesti scambi di righe.