Diploma in Informatica

1^o TEST DI CALCOLO NUMERICO A.A. 2000/01

Si indichi per ognuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa. Le risposte alle domande con asterisco 5(j) e 7(p) verranno prese in considerazione solo se corredate da esauriente spiegazione sul retro del foglio. Se la spiegazione è corretta, vi sarà un aumento di valutazione.

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(2,6,4,4)}$. Si indichino con ω e Ω il minimo e il massimo numero positivo di $\mathcal{F}$ e con μ e $\mathcal{I}$ il minimo e il massimo intero positivo di $\mathcal{F}$.
(a) $\omega = 2^{-5}$. (b) $\Omega = 2^4 - 2^{-3}$.
(c) $\omega\,\Omega > 2^{-1}$. (d) $\mu < 1$. (e) $\mathcal{I} \geq 2^3$.
(f) $\mathcal{I}$ è dispari. (g) $\mathcal{I} = \sum_{k=0}^{3} 2^k$. (h) $\omega\,\mathcal{I} > 2^{-2}$.
(i) Gli elementi positivi di $\mathcal{F}$ sono 288.

2. Per calcolare la $\sqrt{5}$ si può applicare il metodo delle tangenti all'equazione $x^2 - 5 = 0$, assumendo $x_0 = 3$. Si dimostra che la successione $\{x_i\}$ così ottenuta verifica la seguente relazione (R): $\sqrt{5} < x_{i+1} < x_i$. Si opera in $\mathcal{F}_{(2,4,m,M)}$ con troncamento, per cui la successione che si calcola è
$\widetilde{x}_0 = 3, \quad \widetilde{x}_{i+1} = (\widetilde{x}_i \oplus (5 \oslash \widetilde{x}_i)) \oslash 2, \quad$ per $\quad i = 0, 1, \ldots .$
(a) $\widetilde{x}_1 = (10.11)_2$. (b) $\widetilde{x}_1 = \mathrm{trn}(x_1)$.
(c) $\widetilde{x}_1 < \sqrt{5}$. (d) $\widetilde{x}_2 = (1.001)_2$. (e) $\widetilde{x}_2 < \sqrt{5}$.
(f) $\widetilde{x}_2 < \widetilde{x}_1$. (g) $\widetilde{x}_3 < \widetilde{x}_2$. (h) $\widetilde{x}_3 = \widetilde{x}_0$.
(i) La relazione (R) resta valida anche per i valori effettivamente calcolati $\widetilde{x}_i$.

3. Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ il vettore formato dalle 4 componenti x_i, per $i = 1, \ldots, 4$. Si vuole calcolare $s = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$ con l'algoritmo indicato dal seguente grafo

Si dica se per ogni $\mathbf{x}$ è:
(a) $c_1^{(1)} = c_1^{(3)}$. (b) $c_1^{(5)} = c_1^{(7)}$. (c) $c_2^{(5)} < 1$.
(d) $|c_2^{(5)}| < 1/2$. (e) $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)}$. (f) $|\epsilon_{in}| < 2u$.
(g) $|\epsilon_{in}| \leq 2u$. (h) $|\epsilon_{alg}| < 3u$. (i) $|\epsilon_{alg}| > 2u$.

4. È data l'equazione $x \log(1+x) + 2x + x^2 = 0$. Si dica se le seguenti equazioni sono equivalenti a quella data:
(a) $\log(1+x) = -\dfrac{2x + x^2}{x}$. (b) $\log(1+x) = -(2+x)$.
(c) $1 + x = \mathrm{e}^{-(2+x)}$. (d) $x = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(2x+x^2)} - 1$.

5. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - 1 - x\,\log(2x)$.
(a) È $f\,' \in C^1[0,1]$.
(b) È $f\,'(x) > 0$ per ogni $x > 0$.
(c) L'equazione $f\,'(x) = 0$ ha una sola soluzione reale di molteplicità 2.
(d) La funzione $f\,''(x)$ si annulla in un solo punto.

(e) L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale.
(f) L'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali distinte.
Il metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$
(g) converge se $x_0 > 2$. (h) converge se $x_0 > 1/2$. (i) converge se $x_0 = 1/2$.
(j)* converge per ogni x_0 tale che $0 < x_0 < 1$ e $x_0 \neq 1/2$. Se il metodo delle tangenti converge, l'ordine è
(k) $p = 2$. (l) $p > 2$.

6. L'equazione $x = g(x)$, dove $g(x) = \dfrac{1}{6}\,(x^3 - 6x^2 + 17x - 6)$, ha le 3 soluzioni reali $\alpha_i = i$ per $i = 1, 2, 3$. Il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$
(a) per $0 < x_0 < 1$ converge ad α_1.
(b) per $1 < x_0 < 2$ converge ad α_2.
(c) per $2 < x_0 < 3$ converge ad α_3.
(d) per $x_0 \notin [\alpha_1, \alpha_3]$ diverge.
(e) se converge, ha ordine 1.
(f) per $x_0 \in [3/2, 5/2]$ converge con ordine 2.

7. La matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \text{ parametro reale,}$$
(a) ha il polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (8 + 6\alpha^2)$.
(b) per ogni α ha l'autovalore 2. (c) non ha autovalori reali.
(d) per $\alpha \neq 0$ ha 1 autovalore reale e 2 complessi non reali.
(e) ha un autovalore < 2 per $\alpha = 1$.
(f) è diagonalizzabile per ogni $\alpha \neq 0$. (g) è diagonalizzabile per ogni α.
(h) $\rho(A) > 2$ per ogni $\alpha \neq 0$. (i) $\rho(A) = \sqrt{4 + 3\alpha^2}$.
(j) ha l'autovettore $\mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$.
(k) per $\alpha \neq 0$ ha come autovettore uno dei tre vettori della base canonica.
(l) la somma degli autovalori è 6 per ogni $\alpha \neq 0$.
(m) il prodotto degli autovalori è 8 per ogni $\alpha \neq 0$.
Per $\alpha = 2$ la matrice $B = A^3 - 6A^2 + 24A$ è tale che $B = 32I$.
(n) Se λ è autovalore di A, un autovalore di B è $\mu = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\lambda$.
(o) Gli autovettori di A sono anche autovettori di B.
(p)* Gli autovettori di B sono anche autovettori di A.