Diploma in Informatica

2^o TEST DI CALCOLO NUMERICO A.A. 2000/01 test A

Si indichi per ognuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa. Le risposte alle domande con asterisco 3(e) e 5(g) verranno prese in considerazione solo se corredate da esauriente spiegazione sul retro del foglio. Se la spiegazione è corretta, vi sarà un aumento di valutazione.

1. La funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una norma vettoriale nei seguenti casi:
(a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (b) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i\,|x_i|$.
(c) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_1|$. (d) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + x_1|$.
(e) $f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|/2$.

2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2+\alpha \end{bmatrix}$ dove α è un parametro reale $\neq -1$. Sia $\mu(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$ il numero di condizionamento in norma ∞ di A. Allora
(a) $\mu(A) = \dfrac{1}{|1+\alpha|}\,(\max\{2, 3+|\alpha|\})^2$.
(b) $\mu(A) = \dfrac{1}{|1+\alpha|}\,(\max\{2, |3+\alpha|\})^2$.
(c) $\mu(A) = \dfrac{1}{|1+\alpha|}\,(\max\{2, 1+|2+\alpha|\})^2$.
(d) Esistono valori di α per cui $\mu(A) = \dfrac{1}{1+\alpha}\,(3+\alpha)^2$.
(e) Esistono valori di α per cui $\mu(A) = |1+\alpha|$.
(f) Esistono valori di α per cui $\mu(A) = \dfrac{4}{1+\alpha}$.
(g) Per $\alpha > 0$ è $\mu(A) > \alpha$.
(h) Per $\alpha = -3$ è $\mu(A) = 2$.
(i) Per ogni α tale che $|\alpha| < 1$ la matrice è ben condizionata.

3. Per n pari e > 2 sono dati gli n numeri $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ la matrice i cui elementi sono

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\alpha_i & \text{se } i-j = 0 \text{ e } 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora
(a) A è invertibile.
(b) gli autovalori di A sono gli α_i.
(c) se $\alpha_i = (-1)^i$, A ha $n/2$ autovalori nulli.
(d) se gli α_i sono tutti distinti, A è diagonalizzabile.
(e)* se $\alpha_i = \alpha_j$ per $i \neq j$, A non è diagonalizzabile.
(f) se $\alpha_i = 1$ per ogni i, A^{-1} è bidiagonale.
(g) gli autovalori di A^TA sono uguali a α_i^2.
(h) gli autovalori di $A^T + A$ sono uguali a $2\alpha_i$.
(i) $\rho(A^T + A) \leq 4 \max_{1,\ldots,n} |\alpha_i|$.
(j) per calcolare A^{-1} bastano n operazioni moltiplicative.

4. Sia $\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ un metodo iterativo per risolvere sistemi lineari. Allora
(a) se $\rho(P) < 1$ il metodo iterativo è convergente.
(b) se $\|P\|_\infty < 1$ il metodo iterativo è convergente.
(c) se $\|P\|_\infty > 1$ il metodo iterativo non è convergente.
(d) se $\|P\|_\infty > 1$ e $\|P^2\|_\infty < 1$ il metodo iterativo è convergente.
(e) se $\|P\|_\infty > 1$, $\|P\|_1 > 1$ e $\|P\|_2 > 1$ il metodo iterativo non è convergente.

5. Siano $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$, dove α e β sono due numeri reali $\neq 0$, e A la matrice di ordine 4

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

Siano J e G rispettivamente la matrice di iterazione di Jacobi e la matrice di iterazione di Gauss-Seidel della A. Allora
(a) J è singolare. (b) G è singolare.
(c) gli autovalori di J sono reali. (d) gli autovalori di G sono reali.
(e) se $\alpha = -\beta = 1$ il metodo di Jacobi è convergente.
(f) se $\alpha = 0.5$ e $\beta = 2$ il metodo di Gauss-Seidel è convergente.
(g)* non è possibile che il metodo di Jacobi sia convergente e quello di Gauss-Seidel no.
Per n intero grande, sia A la matrice diagonale a blocchi di ordine $2n$

$$A = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{bmatrix}.$$

Si vuole risolvere un sistema avente matrice dei coefficienti A e termine noto $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{2n}$. Se si applica il metodo
(h) iterativo di Jacobi, il costo di ogni iterazione è dell'ordine di n.
(i) iterativo di Gauss-Seidel, il costo di ogni iterazione è dell'ordine di n^2.
(j) diretto di Gauss, il costo per calcolare la soluzione una volta che è stata calcolata la $[A^{(n)} \mid \mathbf{b}^{(n)}]$ è dell'ordine di $n^2/2$.

6. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, si considerino i punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 1/k$, con $k > 1$. Siano $p(x)$ il polinomio di interpolazione della f nei nodi x_0 e x_1 e $q(x)$ il polinomio di interpolazione della f nei nodi x_0, x_1 e x_2.
(a) $p(x)$ ha grado 1. (b) $p(x) > f(x)$ per $0 < x < 1$.
(c) esiste un valore di k per cui $q(x)$ ha grado 1.
(d) per $k = 2$ è $q(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{6}$. (e) è $q(x) = \dfrac{kx^2 + x}{2(k+1)}$.
(f) è $|f(x) - p(x)| \leq |x(x-1)|$ per ogni $x \in [0,1]$.
(g) è $|f(x) - q(x)| \leq |x(x-1)|$ per ogni $x \in [0,1]$.
(h) esistono valori di k per cui $|f(x) - q(x)| \leq |x(x-1)|$ per ogni $x \in [0,1]$.
(i) è $|f(x) - q(x)| \geq \dfrac{1}{2}$ per ogni $x \in [0,1]$.