

Diploma in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

17/7/2001

Esercizio 1 (a) Il calcolo di $\sin x$ è un problema ben condizionato per ogni x ?

(b) Si vuole calcolare $\sin x$ mediante la formula $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, supponendo di avere in libreria la funzione che calcola il coseno. Si tratta di un algoritmo stabile?

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 3.$$

(a) Si verifichi che l'equazione $f(x) = 0$ ha un'unica soluzione reale α .

(b) Si studi la convergenza ad α (compresa la scelta del punto iniziale e l'ordine di convergenza) del metodo delle tangenti.

(c) Assumendo $x_0 = 0$ si calcolino x_i per $i = 1, 2$ con il metodo delle tangenti. La successione che si ottiene è convergente?

Esercizio 3 È data la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \text{ oppure } j = i + 2, \\ -2 & \text{se } j = i + 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Per $n = 5$ si calcoli A^{-1} .

(b) Si scriva A^{-1} per n qualsiasi e si verifichi che in effetti risulta $AA^{-1} = I$.

(c) Si dica se sono vere le seguenti proposizioni:

(1) l'inversa di una matrice triangolare è triangolare.

(2) l'inversa di una matrice a banda è a banda.

(d) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A .

Esercizio 4 Per $h > 0$ si considerino i punti $a, x_0 = a + h, x_1 = a + 2h, b = a + 3h$ e sia $f(x)$ una funzione derivabile con continuità almeno due volte nell'intervallo $[a, b]$.

(a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ nei nodi x_0 e x_1 .

(b) Si dia una maggiorazione del modulo del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ per $x \in [a, b]$.

(c) Si calcoli $P = \int_a^b p(x) dx$.

(d) Si dia un'interpretazione di P come formula di quadratura.