Soluzione della prima prova intermedia di Calcolo Numerico 7 Novembre 2001 - Compito A

Esercizio 1

(a) Si contano a parte 0 e 1. Restano da contare tutti i numeri del tipo $0.1d_1 \dots d_{20} * 2^p$ con $d_i \in \{0, 1\}$ e con p intero tale che $-128 \le p \le 0$. Dunque $|G| = 2 + 2^{19} * 129$.

(b) Applicando la formula si trova $u = 2^{-20}$.

(c) Per definizione
$$\epsilon_{an} = \frac{f(x) - p(x)}{f(x)}.$$
Utilizzando la forma di Lagrange del resto otteniamo subito
$$\epsilon_{an} = \frac{x^3(5e^{\xi} - 3e^{-\xi})}{6(5e^x + 3e^{-x})}$$
con $\xi \in (0, x)$ e quindi
$$|\epsilon_{an}| \le \frac{5e + 3}{6(5 + 1)} < \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

(d) Il coefficiente di amplificazione risulta
$$C_{f,x} = x\frac{5e^x - 3e^{-x}}{5e^x + 3e^{-x}}$$
e quindi
$$|C_{f,x}| \le \frac{5e + 3}{6} < 3.$$
Allora $|\epsilon_{in}| \le 3u = 3 * 2^{-20}$.

(e) Analizzando l'errore algoritmico otteniamo
$$\epsilon_{alg} = \xi_1 + \frac{2x + 4x^2}{8 + 2x + 4x^2}\left(\xi_2 + \xi_3 + \frac{4x}{2 + 4x}\xi_4\right).$$
Poichè $x \in [0, 1]$ risulta $|\frac{2x+4x^2}{8+2x+4x^2}| < 1$ ed analogamente $|\frac{4x}{2+4x}| < 1$. Dunque
$$|\epsilon_{alg}| \le 4u = 4 * 2^{-20}.$$

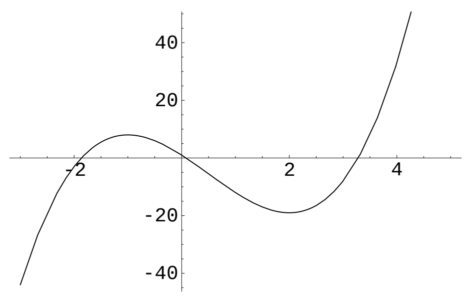
(f) Sulla base del teorema sull'errore totale risulta

$$\epsilon_{tot} \leq \frac{1}{2} + 3 * 2^{-20} + 4 * 2^{-20}$$

(g) Per ridurre l'errore totale occorrerà ridurre l'errore analitico. Per far questo si potrà per esempio utilizzare un polinomio di Taylor di grado maggiore.

Esercizio 2

(a) La funzione $y = p(x)$ risulta essere definita su tutto l'asse reale ed ivi non solo continua, ma indefinitamente derivabile. Il grafico di $y = p(x)$ risulta essere il seguente



con -1 punto di massimo relativo, 2 punto di minimo relativo e $1/2$ punto di flesso.

(b) Posto $a_0 = -2$ e $b_0 = 4$ risulta $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = 1$. Risulta $p(1) < 0$ e quindi $a_1 = 1$ e $b_1 = 4$. Nell'intervallo $[1, 4]$ è contenuta la sola soluzione γ e quindi il metodo convergerà a γ.

(c) Come noto

$$|x_i - \gamma| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^i} = \frac{6}{2^i}.$$

Si cerca allora i in modo che

$$\frac{6}{2^i} < 2^{-20}.$$

Dunque deve aversi $i > 20 + \log 6$ e quindi sono necessarie almeno 23 iterazioni.

(d) Risulta convergente per $x_0 \in [-2, -1)$. Infatti per $x \in [-2, \alpha]$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in largo del metodo delle tangenti. Per $x_0 \in [\alpha, -1)$ dal grafico otteniamo che x_1 cade sicuramente in un intervallo in cui la convergenza è garantita dallo stesso teorema. Per $x_0 = -1$ il metodo non è applicabile in quanto $p'(-1) = 0$.

(e) Il metodo risulta localmente convergente per il teorema sulla convergenza locale del metodo delle tangenti. Avendosi $p'(\gamma) \neq 0$ e $p''(\gamma) \neq 0$ il metodo risulta di ordine 2.

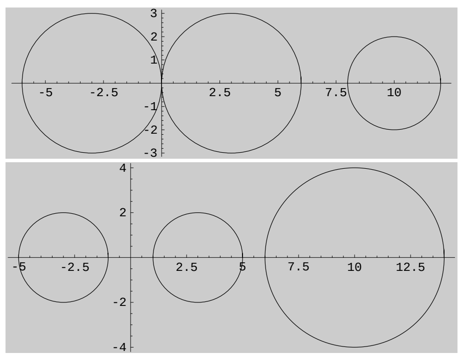
(f) Non è possibile applicare direttamente il teorema di convergenza in largo. Dal grafico in questo caso non è possibile trarre delle conclusioni sicure. Avendosi

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2x_i^3 - 3x_i^2 - 12x_i + 1}{6x_i^2 - 6x_i - 12}$$

otteniamo che $x_1 = 1/12$ e risulta allora possibile applicare il teorema di convergenza in largo per dedurre che il metodo risulta convergente a β.

Esercizio 3

I cerchi di Gerschgorin per riga e per colonna della matrice A sono i seguenti



(a) La matrice A ha coefficienti reali e quindi il suo polinomio caratteristico ha coefficienti reali. Dunque se A avesse autovalori non reali anche i coniugati di questi numeri dovrebbero essere autovalori. Tenuto conto che i cerchi per colonna sono disgiunti si deduce che A ha tre autovalori reali.

(b) Tenuto conto sia dei cerchi per riga che di quelli per colonna si ottiene $1 \leq |\lambda_1| \leq 5$, $1 \leq |\lambda_2| \leq 5$ e $8 \leq |\lambda_3| \leq 12$.

(c) Dal punto precedente sappiamo che 0 non può essere autovalore di A e quindi A non può essere singolare. In modo equivalente si perviene alla stessa conclusione osservando che la matrice A è a predominanza diagonale in senso stretto per colonne.

(d) Procedendo come fatto per la matrice A si riesce a stabilire che vi sarà almeno un autovalore reale. Le limitazioni per i moduli restano le stesse. Non avendo l'autovalore 0 la matrice B non è singolare.