

Soluzione della seconda prova intermedia di  
Calcolo Numerico  
18 Dicembre 2001

**Esercizio 1**

- (a) Il calcolo diretto mostra che  $\|A\|_1 = 9 = \|A\|_\infty$ . Alternativamente si può osservare che  $A$  è simmetrica e la norma uno ed infinito di una matrice simmetrica sono uguali.
- (b) La matrice  $A$  è simmetrica e dalla teoria è noto che per le matrici simmetriche risulta

$$\mu_2(A) = \frac{\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovalore di } A\}}{\min\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovalore di } A\}}.$$

Utilizzando i cerchi di Gerschgorin si trova  $\mu_2(A) \leq 9$ .

- (c) Il metodo di eliminazione di Gauss è applicabile ad  $A$  senza scambi di righe perchè  $A$  è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto. Si trova

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (d) Risulta  $\det A = \det A^{(5)} = 4^5 = 1024$ .
- (e) Il sistema  $Ax = e_5$  risulta equivalente al sistema  $A^{(5)}x = e_5$ . Si trova

$$x = \begin{pmatrix} 1/64 \\ -1/32 \\ 1/16 \\ -1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2**

- (a) I due metodi risultano convergenti perchè la matrice  $A$  è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto per colonne.

(b) Risulta

$$J = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si trova  $\rho(J) = \sqrt{3}/3$  e  $\rho(G) = 1/3$ . Avendosi  $\rho(G) < \rho(J)$  il metodo di Gauss-Seidel converge più velocemente di quello di Jacobi. Si può notare che  $\rho(G) = \rho^2(J)$  e dunque il tasso asintotico di convergenza del metodo di Gauss-Seidel risulta essere il doppio di quello del metodo di Jacobi.

(c) Per la matrice di iterazione  $P$  risulta

$$P = M^{-1}N = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\det P = -2$  non è possibile che gli autovalori di  $P$  abbiano tutti modulo minore di 1 e quindi che il metodo risulti convergente.

### Esercizio 3

(a) Risulta  $f(0) = 1 = g(0)$ ,  $f(1) = 0 = g(1)$ ,  $f(2) = 1 = g(2)$  e quindi il polinomio di interpolazione è lo stesso per le due funzioni, ossia

$$p(x) = L_0(x) + L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = x^2 - 2x + 1.$$

(b) Risulta

$$r_f(x) = x(x-1)(x-2) \frac{\pi^3}{48} \cos \frac{\pi}{2} \xi \quad \text{e} \quad r_g(x) = x(x-1)(x-2)4(\xi-1).$$

In  $[0, 2]$  Si trova che  $\max |x(x-1)(x-2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$  e quindi, sempre in  $[0, 2]$ ,

$$|r_f(x)| \leq \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad |r_g(x)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

(c) Essendo  $g(x)$  un polinomio di quarto grado, il polinomio di interpolazione di  $g(x)$  su 5 nodi distinti coincide con  $g(x)$ . Ne segue che il resto è uguale a zero.

(d) Nell'intervallo  $[0, 2]$  la funzione  $f(x)$  è indefinitamente derivabile e risulta  $|f^{(n)}(x)| \leq (\pi/2)^n$ . Questo garantisce la convergenza della successione dei resti a zero.