
Cognome

Nome

Matricola

Firma

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di **CALCOLO NUMERICO** - Corsi A-B-C

18/12/2001

Esercizio 1 È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verificare che $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.
- (b) Determinare una limitazione superiore per $\mu_2(A)$.
- (c) Dimostrare che il metodo di Gauss è applicabile alla matrice A senza scambi di righe. Successivamente, determinare la matrice triangolare superiore $A^{(5)}$ ottenuta applicando ad A il metodo di eliminazione di Gauss.
- (d) Calcolare $\det A$.
- (e) Risolvere il sistema $Ax = e_5$.

Esercizio 2 È assegnato il sistema $Ax = b$ ove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel risultano convergenti.
- (b) Calcolare $\rho(J)$ e $\rho(G)$ ove J e G indicano le matrici di iterazione dei due metodi. Cosa si può dedurre circa la velocità di convergenza dei due metodi?
- (c) Dimostrare che il metodo ottenuto ponendo $A = M - N$ con

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non risulta convergente.

Esercizio 3 Sono assegnati i tre nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_2 = 2$ e le funzioni $f(x) = 1 - \sin \frac{\pi}{2}x$ e $g(x) = (x - 1)^4$.

- (a) Calcolare il polinomio di interpolazione delle due funzioni sui nodi assegnati.
- (b) Determinare delle maggiorazioni per i moduli dei due resti.
- (c) Si aggiungono ai nodi iniziali i due nodi $x_3 = \frac{1}{2}$ e $x_4 = \frac{3}{2}$. Dire, senza eseguire calcoli, quale diventa il polinomio di interpolazione della funzione $g(x)$ ed il relativo resto.
- (d) Scelti $n + 1$ nodi equidistanti in $[0, 2]$ si indichi con $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione della funzione $f(x)$. Si dimostri che la successione dei polinomi $p_n(x)$ converge ad $f(x)$.