CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di Calcolo Numerico–Corsi A,B,C
16/7/2002

Esercizio 1 Sia $fl(x)$ la rappresentazione, ottenuta per troncamento, nell'insieme $F(10, 3, m, M)$ di un numero $x \in \mathbf{R}$.
(a) Dimostrare che x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$ e $0 < x_1 \leq x_2$ implica $fl(x_1) \leq fl(x_2)$.
(b) Dimostrare con un opportuno esempio che $fl(x_1) \leq fl(x_2)$ non implica $x_1 \leq x_2$.

Esercizio 2 Si vuole utilizzare il metodo delle tangenti per approssimare gli zeri della funzione $\mathrm{f}(x) = x + \log x$.
(a) Separare gli zeri della funzione.
(b) Individuare per quali punti iniziali il metodo risulta convergente (suggerimento: tenere conto che la funzione non è definita per $x \leq 0$).
(c) Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizio 3
(a) Dimostrare che gli elementi v_{ij} di una matrice ortogonale V sono tali che $|v_{ij}| \leq 1$.
(b) Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica. Sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente ed il fatto che A è diagonalizzabile mediante matrici ortogonali, dimostrare che gli elementi a_{ij} di A sono tali che $|a_{ij}| \leq n\,\rho(A)$.

Esercizio 4 Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, con A matrice triangolare superiore non singolare, si intende utilizzare il metodo di Jacobi.
(a) Dimostrare che il metodo risulta convergente.
(b) Applicare il metodo, calcolandone alcune iterate a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nel caso particolare

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Sono assegnati n punti (x_i, y_i), con $i = 1, \ldots, n$.
(a) Determinare la costante c (ossia la retta di equazione $y = c$) che meglio approssima tali punti nel senso dei minimi quadrati.
(b) Considerare il caso particolare, $(x_i, y_i) = (i, 1)$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e $(x_n, y_n) = (n, n)$. Determinare $\lim_{n\to\infty} c$.