Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
16 Luglio 2002

Esercizio 1

(a) Rappresentati x_1 e x_2 in forma normalizzata (questo è possibile in quanto si tratta di numeri non nulli) ci sono due eventualità. (1) L'esponente di x_1 è inferiore a quello di x_2, allora $fl(x_1) < fl(x_2)$ perchè il troncamento non altera l'esponente. (2) L'esponente di x_1 è uguale a quello di x_2, allora $fl(x_1) < fl(x_2)$ se x_1 differisce da x_2 in una delle prime tre cifre, $fl(x_1) = fl(x_2)$ altrimenti.

(b) Presi per esempio $x_1 = 1001$ e $x_2 = 1000$ risulta $fl(x_1) = fl(x_2) = 1000$.

Esercizio 2

(a) Con un breve studio di funzione si trova che f ha un solo zero $\alpha \in (0, 1)$.

(b) La teoria garantisce la convergenza se $x_0 \in (0, \alpha]$. Se $x_0 > \alpha$ si osserva che può risultare sia $x_1 \in (0, \alpha)$, caso in cui si ottiene una successione convergente, sia $x_1 \leq 0$, caso in cui il metodo non può proseguire. Per distinguere tra i due casi risolviamo l'equazione $x_1 = 0$ ossia

$$0 = x_0 - \frac{x_0 + \log x_0}{1 + 1/x_0}.$$

Si trova subito $x_0 = e$. Dunque si ha convergenza se e solo se $x_0 \in (0, e)$.

(c) La funzione ha derivata prima e seconda continue in un intorno di α inoltre $\mathrm{f}'(\alpha) \neq 0 \neq \mathrm{f}''(\alpha)$. Il metodo delle tangenti è dunque del secondo ordine.

Esercizio 3

(a) Risulta per definizione $VV^T = I$ e dunque per ogni riga i risulta $\sum_j v_{ij}^2 = 1$. Ne segue $|v_{ij}| \leq 1$ per ogni i e j.

(b) Esiste una matrice ortogonale V tale che $A = VDV^T$, con D matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori di A. Sfruttando il risultato al punto (a) si trova

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &= |\sum_k v_{ik} d_{kk} v_{jk}| \leq \sum_k |v_{ik} d_{kk} v_{jk}| = \\ & \sum_k |v_{ik}||d_{kk}||v_{jk}| \leq \sum_k |d_{kk}| \leq n \max_k |d_{kk}| = n\rho(A). \end{aligned}$$

Esercizio 4

(a) La matrice di iterazione è triangolare superiore in senso stretto e ha quindi raggio spettrale uguale a zero. Essendo il raggio spettrale della matrice di iterazione inferiore a uno la convergenza è assicurata.

(b) Il metodo assume la forma

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e dunque si trova

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Avendosi $x_2 = x_3$ tutte le iterate successive coincidono.

Esercizio 5

(a) Si deve calcolare

$$\min_c \| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} c - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \|_2.$$

Il sistema delle equazioni normali si riduce alla singola equazione $nc = \sum_k y_k$ e dunque $c = (\sum_k y_k)/n$.

(b) Si trova in questo caso $c = (2n-1)/n$ e quindi $\lim_{n\to\infty} c = 2$.