Cognome Nome Matricola Firma

Corso di laurea in Informatica

SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO - Corsi A-B-C

18/12/2002

Esercizio 1 Sia A la matrice di ordine 5 i cui elementi diversi da zero sono $a_{i,i} = 1$ e $a_{i,i+1} = k$, con $0 < k < 1$.

a) Si scriva la matrice $A^T A$. Sfruttando i cerchi di Gerschgorin, si diano delle limitazioni inferiore e superiore degli autovalori di $A^T A$ al variare del parametro k.

b) Sfruttando le limitazioni precedenti, si dia una maggiorazione M del numero di condizionamento $\mu_2(A)$ in funzione di k. Vi sono valori di k per cui la matrice A è ben condizionata?

c) Indicati con λ_i ,$i = 1, \ldots, 5$ gli autovalori di $A^T A$, ordinati in modo crescente, si dica quanto vale il $\prod_{i=1,\ldots,5} \lambda_i$.

d) Sfruttando le limitazioni superiori trovate precedentemente per λ_i, $i = 2, \ldots, 5$, si dia una limitazione inferiore per λ_1.

e) * Si dia una maggiorazione del numero di condizionamento $\mu_2(A)$ indipendente da k.

Esercizio 2 Si consideri il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad \text{dove} \quad P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3.$$

a) Si determinino $p_1 = \|P\|_\infty$ e $p_2 = \|P^2\|_\infty$.

b) Sfruttando i valori p_1 e p_2, si dia una limitazione per $\rho(P)$ e $\rho(P^2)$.

c) Sfruttando la limitazione per $\rho(P^2)$ si dia una limitazione per $\rho(P)$. Si può concludere adesso che il metodo iterativo è convergente?

d) A conferma di quanto trovato al punto precedente si calcolino gli autovalori di P (uno degli autovalori è uguale a $1/4$).

Esercizio 3 È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$$

a) Si scriva il polinomio di interpolazione di $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e il resto $r(x) = f(x) - p(x)$.

b) Si dia una maggiorazione di $|r(x)|$ per $x \in [0, 3]$.