# Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
18 Settembre 2002

## Esercizio 1

**(a)** Nel caso si usi la formula di Laplace risulta $\det A = a - bc$. Allora

$$\varepsilon_{alg}^{(L)} = \epsilon_1 - \frac{bc}{a - bc}\epsilon_2$$

con $|\epsilon_i| \leq u$ per $i = 1, 2$ e dunque

$$|\varepsilon_{alg}^{(L)}| \leq (1 + \frac{|bc|}{|a - bc|})u.$$

**(b)** Nel caso si utilizzi il metodo di Gauss per porre $A$ in forma triangolare risulta $\det A = a(1 - b(c/a))$, quindi

$$\varepsilon_{alg}^{(G)} = \eta_1 + \eta_2 - \frac{bc}{a - bc}(\eta_3 + \eta_4)$$

con $|\eta_i| \leq u$ per $i = 1, \ldots, 4$ e dunque

$$|\varepsilon_{alg}^{(G)}| \leq (1 + \frac{|bc|}{|a - bc|})2u.$$

In entrambi i casi vi può essere instabilità se $\det A$ assume valori prossimi a zero.

## Esercizio 2

Innanzitutto occorre trovare l'iperbole tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Si imposta allora il sistema

$$\begin{cases} f(x_0) = b + a/x_0 \\ f'(x_0) = -a/x_0^2, \end{cases}$$

che risolto fornisce

$$\begin{cases} a = -x_0^2 f'(x_0) \\ b = f(x_0) + x_0 f'(x_0). \end{cases}$$

Il punto $x_1$ è lo zero dell'iperbole cosi determinata, ossia risulta $b+a/x_1 = 0$. Dunque

$$x_1 = -\frac{a}{b} = \frac{x_0^2 f'(x_0)}{f(x_0) + x_0 f'(x_0)}.$$

## Esercizio 3

Sia $e_k$ il $k-esimo$ vettore canonico. Allora $v = Ae_k$ è la $k-esima$ colonna di $A$. Se la $k-esima$ colonna è multipla di $e_k$ risulta per un numero $\alpha$ opportuno $Ae_k = \alpha e_k$ da cui $AAe_k = \alpha Ae_k$ ossia $Av = \alpha v$. Da questa relazione e dal fatto che $v \neq 0$ per la non singolarità di $A$ si deduce che $v$ è autovettore di $A$. Viceversa, sia $v$ autovettore di $A$ e sia $\alpha$ l'autovalore a cui risulta associato. Allora $Av = \alpha v$ ossia $AAe_k = \alpha Ae_k$ da cui, moltiplicando per $A^{-1}$ si ottiene $Ae_k = \alpha e_k$.

## Esercizio 4

Entrambi i metodi richiedono $n^2 - n$ moltiplicazioni ed $n$ divisioni per ogni passo.

## Esercizio 5

**(a)** Sia $y = q+mx$ la retta di approssimazione nel senso dei minimi quadrati. Per determinare $m$ e $q$ occorre risolvere il seguente sistema di equazioni normali

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix},$$

e si trova $q = -27/140$ e $m = 5/28$

**(b)** Con le notazioni del punto precedente il sistema di equazioni normali da risolvere diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Con qualche calcolo si trova

$$m = \frac{2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2}{2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2} = \frac{2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_2(-y_1) + (-x_1)y_2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2},$$

che, per le ipotesi fatte, implica $m > 0$.