Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
22 Gennaio 2002

Esercizio 1

Gli interi positivi contenuti in $\mathcal{F}(2,3,5,4)$ sono 11. Infatti, indicando con p l'esponente della rappresentazione normalizzata, è possibile avere interi solo quando $p \geq 1$. Vi è un solo intero positivo con $p = 1$, ve ne sono due con $p = 2$ e quattro sia con $p = 3$ che con $p = 4$. Il ragionamento precedente si può generalizzare al caso dell'insieme $\mathcal{F}(2,24,128,127)$ osservando che per ogni valore di $p \geq 24$ si ottengono sempre 2^{23} interi positivi. Gli interi positivi in $\mathcal{F}(2,24,128,127)$ sono allora

$$\sum_{k=0}^{22} 2^k + 104 \times 2^{23} = 2^{23} - 1 + 104 \times 2^{23} = 105 \times 2^{23} - 1,$$

ossia più di 8×10^8.

Esercizio 2

(a) Tenuto conto che l'equazione $y = x^2 + a$ rappresenta una parabola che volge la concavità verso l'alto ed ha il vertice in $(0, a)$ si trova subito l'equazione $x = x^2 + a$ ha una soluzione minore o uguale a zero se e solo se $a \leq 0$.

(b) Risulta $\gamma(a) = (1 - \sqrt{1 - 4a})/2$. La funzione di iterazione è $g(x) = x^2 + a$ e quindi $g'(\gamma(a)) = 1 - \sqrt{1 - 4a}$. Se si traccia un grafico di questa funzione al variare di a si trova che se $-3/4 < a \leq 0$ allora $-1 < g'(\gamma(a)) \leq 0$. Questo garantisce la convergenza locale del metodo. Per $a < 0$ risulta $g'(\gamma(a)) \neq 0$ e quindi l'ordine di convergenza è 1. Per $a = 0$ risulta $\gamma(a) = 0$ ed avendosi $g'(0) = 0$ e $g''(0) \neq 0$ l'ordine di convergenza è 2.

Esercizio 3

Preso inizialmente $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ otteniamo che la prima colonna di A deve avere un elemento uguale a zero e l'altro uguale a ± 1. Risultato analogo si ottiene per la seconda colonna preso $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Preso $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si dimostra che A non può avere due elementi non nulli su una riga. Dunque restano solo le 8 matrici

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che soddisfano tutte alle richieste.

Esercizio 4

(a) La matrice di iterazione del metodo è $Q = \frac{1}{12}P$ e risulta evidentemente $\|Q\|_1 \leq \frac{5}{6}$. Per un noto teorema questo garantisce la convergenza del metodo.

(b) Risulta $e_k = Q^k e_0$ e dunque $\|e_k\|_1 \leq \|Q\|_1^k \|e_0\|_1$. Tutti gli interi k per cui $(\frac{5}{6})^k \leq \frac{1}{2}$ soddisfano alla condizione richiesta. Allora basta scegliere $\bar{k} = \lceil \log \frac{1}{2} / \log \frac{5}{6} \rceil = 4$.

Esercizio 5

La retta passante per $(x_0-\alpha, y_1)$ e $(x_0+\alpha, y_3)$ risulta avere coefficiente angolare $m = (y_3 - y_1)/(2\alpha)$. Occorre mostrare che la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati ha coefficiente angolare uguale a m. Indicando con $y = ax + b$ tale retta il sistema delle equazioni normali è

$$\begin{pmatrix} 3 & 3x_0 \\ 3x_0 & 3x_0^2 + 2\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ x_0(y_1 + y_2 + y_3) + \alpha(y_3 - y_1) \end{pmatrix},$$

da cui si deduce $a = m$.