CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Prova scritta di Calcolo Numerico–Corsi A,B,C
26/6/2002

Esercizio 1 Si consideri un'aritmetica con troncamento definita su $F(10, 3, 3, 3)$.
(a) Trovare $a, b \in F$ tali che $(a \oplus b) \oslash 2$ risulti uguale ad a.
(b) Trovare $a, b \in F$ tali che $(a \oplus b) \oslash 2$ risulti minore sia di a che di b.

Esercizio 2
(a) Dimostrare che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ dove

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

risulta convergente per ogni punto iniziale x_0.
(b) Spiegare come mai il risultato ottenuto al punto (a) non è in contrasto con il teorema del punto fisso.

Esercizio 3 Una matrice tridiagonale $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è tale che $a_{ij} > 0$ se $i = j$ e se $i - j = 1$ mentre $a_{ij} < 0$ se $i - j = -1$.
(a) Dimostrare che A può essere ridotta in forma triangolare mediante il metodo di eliminazione di Gauss senza che siano richiesti scambi di righe (suggerimento: procedere per induzione su n).
(b) Dimostrare che la matrice A ha determinante positivo.

Esercizio 4
(a) Utilizzando quanto noto circa la convergenza dei metodi iterativi del tipo

$$x_{k+1} = Px_k + b$$

con $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e b, $x_k \in \mathbf{R}^n$ dimostrare che $\rho(P) < 1$ è una condizione sufficiente affinchè il metodo

$$X_{k+1} = PX_k + B$$

con P, B, $X_k \in \mathbf{R}^{n \times n}$, risulti convergente per ogni matrice X_0.
(b) Verificare che se

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il metodo risulta convergente e determinare $X^* = \lim_{k \to \infty} X_k$.

Esercizio 5 Sono assegnati i tre punti $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$.
(a) Quanti polinomi di grado esattamente 1 interpolano i tre punti?
(b) Quanti polinomi di grado esattamente 2 interpolano i tre punti?
(c) Quanti polinomi di grado esattamente 3 interpolano i tre punti?
Motivare le risposte.