Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico
26 Giugno 2002

Esercizio 1

Si deve tener conto che in aritmetica esatta $(a+b)/2$ cade esattamente a metà tra a e b.

(a) Scelti per esempio $a = 0.101 * 10^0$ e $b = 0.102 * 10^0$ si trova innanzi tutto $a \oplus b = 0.203 * 10^0$ e quindi

$$0.203 * 10^0 \oslash 2 = \mathrm{trn}(0.203 * 10^0/2) = \mathrm{trn}(0.1015 * 10^0) = a.$$

(b) Occorre fare in modo che l'addizione di macchina non produca un risultato esatto. Posto allora $a = b = 0.501 * 10^0$ risulta $a \oplus b = 0.100 * 10^1$ e quindi $0.100 * 10^1 \oslash 2 = 0.500 * 10^0$.

Esercizio 2

Si trova subito che 0 è l'unico punto fisso della funzione g.

(a) Se $|x_0| > 1$ allora $x_1 = 0$ ed il metodo raggiunge il punto fisso in un solo passo. Se $0 < |x_0| \leq 1$ allora le iterate raddoppiano progressivamente fino a superare in modulo 1 e si ricade nel caso precedente.

(b) Il teorema del punto fisso fornisce solo una condizione sufficiente per la convergenza. Se le ipotesi del teorema non sono verificate la convergenza può aver luogo ugualmente.

Esercizio 3

(a) Nel caso $n = 2$ il metodo è chiaramente applicabile senza scambi di righe perchè $a_{11} \neq 0$ e produce subito una matrice triangolare:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} + & - \\ 0 & + \end{pmatrix}.$$

Nel caso $n > 2$ il primo passo del metodo è applicabile senza scambi di righe perchè $a_{11} \neq 0$ e risulta

$$\begin{pmatrix} + & - & & \\ + & + & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & - \\ & & + & + \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} + & - & & \\ 0 & + & \ddots & \\ & + & \ddots & - \\ & & + & + \end{pmatrix}.$$

A questo punto si può applicare l'ipotesi induttiva sulla sottomatrice principale di coda di ordine $n-1$ di A.

(b) La matrice triangolare ottenuta applicando il metodo di Gauss ad A ha elementi diagonali positivi ed il loro prodotto è il determinante di A.

Esercizio 4

(a) Il metodo $X_{k+1} = PX_k + B$ con matrice X_0 assegnata opera in modo indipendente sulle colonne delle matrici X_k. Risulta quindi equivalente ad una famiglia di n metodi $x_{k+1} = Px_k + B^{(j)}$ ove $x_0 = X_0^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$ (ovviamente qui $B^{(j)}$ e $X_0^{(j)}$ indicano le j-esime colonne di B e X_0). Se $\rho(P) < 1$ questi n metodi risultano tutti convergenti e dunque risulta convergente anche il metodo di partenza.

(b) Vi è convergenza in quanto $\rho(P) = 1/2$. Dovrà aversi $X^* = PX^* + B$ e quindi $X^* = (I-P)^{-1}B$. Si trova

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Come è noto dalla teoria vi è un solo polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola tre punti dati. In questo caso il polinomio è ovviamente $p(x) = x+1$ che ha grado esattamente uno. Dunque non esiste alcun polinomio di grado esattamente due che interpoli i tre punti. Di grado esattamente tre ve ne sono infiniti $q_\alpha(x) = x + 1 + \alpha(x-1)(x-2)(x-3)$.