Soluzione della prima prova intermedia
di Calcolo Numerico
17 Novembre 2004

Esercizio 1

a) Con semplici calcoli si trova

$$C_f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

In un intorno sinistro di π il calcolo di f risulta mal condizionato.

b) Per quanto riguarda l'errore algoritmico relativo al primo algoritmo si trova

$$\varepsilon_{\text{alg},1} \doteq \varepsilon_1,$$

assumendo, come si fa usualmente, che il calcolo di $x/2$ produca il risultato esatto. L'algoritmo è quindi stabile.

Per quanto riguarda l'errore algoritmico relativo al secondo algoritmo si trova

$$\varepsilon_{\text{alg},2} \doteq \eta_4 + \eta_1 - \left(\eta_3 + \frac{\cos x}{1+\cos x}\eta_2\right),$$

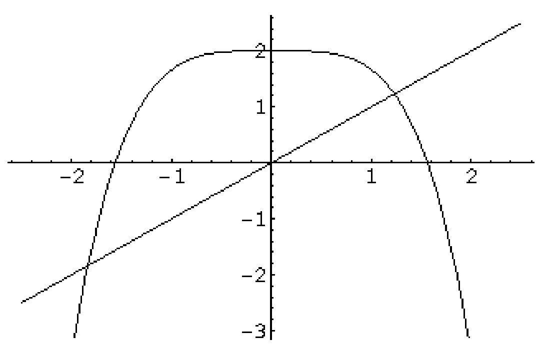
dove η_1, η_2, η_3 ed η_4 sono rispettivamente gli errori locali del calcolo di $\sin x$, $\cos x$, della somma $1+\cos x$ e del rapporto $\sin x/(1+\cos x)$.

$$|\varepsilon_{\text{alg},2}| \stackrel{.}{\leq} \left(3 + \left|\frac{\cos x}{1+\cos x}\right|\right) u,$$

dove u indica la precisione di macchina. L'algoritmo risulta instabile per x in un intorno sinistro di π.

Esercizio 2

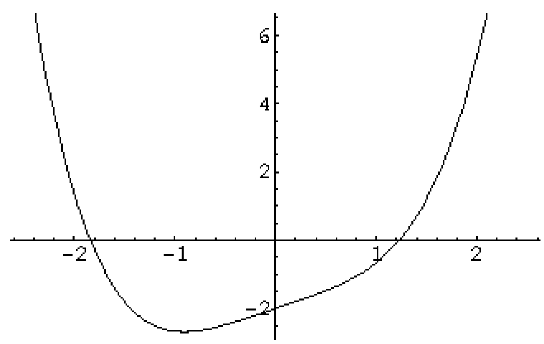
a) Dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = g(x)$



risulta che l'equazione $x = g(x)$ ha due soluzioni, che saranno indicate con α_1 e α_2. Possibili intervalli di separazione sono $-2 < \alpha_1 < -1$ e $1 < \alpha_2 < 2$.

b) Poichè $g'(x) = \frac{4}{3}x^3$ risulta $|g'(x)| \leq 1$ se e solo se $|x| \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. Dunque sia $|g'(\alpha_1)| > 1$ che $|g'(\alpha_2)| > 1$ ed in entrambi i casi il teorema del punto fisso risulta inapplicabile. Il fatto che nelle soluzioni sia $|g'| > 1$, insieme con un'analisi grafica, esclude la convergenza locale. Assumendo $x_0 = 0$ si trova $x_1 = 2$ e $x_2 = -10/3$.

c) La funzione f è indefinitamente derivabile, decrescente fino al punto di minimo $\mu = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, indi crescente. Inoltre, essendo $f''(x) = 4x^2$ la concavità è sempre rivolta verso l'alto.



Dalle condizioni sufficienti per la convergenza del metodo delle tangenti si deduce che per $x_0 < \mu$ il metodo converge ad α_1 e per $x_0 > \mu$ il metodo converge ad α_2. Applicando il teorema sull'ordine di convergenza del metodo delle tangenti si deduce che l'ordine di convergenza è due in entrambi i casi.

Esercizio 3

a) Disegnando i cerchi di Gershgorin per righe si ottiene la limitazione superiore $\rho(A) \leq 19$. Disegnando i cerchi per colonne si ottiene la limitazione $\rho(A) \leq 16$, migliore della precedente.

b) Ovviamente

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Le matrici A e B sono simili e dunque hanno gli stessi autovalori. La matrice B è simmetrica e dunque ha autovalori reali.

d) Siccome A e B hanno gli stessi autovalori hanno anche lo stesso raggio spettrale. Se si disegnano i cerchi di Gershgorin di B si trova $\rho(B) \leq 8$.

e) Chiaramente 0 non appartiene all'unione dei cerchi di Gershgorin di B e dunque non è autovalore di B e di conseguenza nemmeno di A. La matrice A risulta quindi invertibile.