CORREZIONE DELLA SECONDA PROVA PARZIALE DI CALCOLO NUMERICO

21/12/2004

Esercizio 1. Per $n = 2$ è $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_1/2$. Per $n > 2$ la f non è una norma in quanto non verifica la proprietà triangolare. Si consideri ad esempio

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

È $f(\boldsymbol{x}_1) = 1/2$, $f(\boldsymbol{x}_2) = 1/2$, $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = 3/2$, $f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = 1$, quindi non vale $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \le f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$.

Esercizio 2. La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_J(\lambda) = -\lambda\Big(\lambda^2 + \frac{5}{4}\Big),$$

gli autovalori di J sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{5}\,\boldsymbol{i}/2$. Quindi $\rho(J) = \sqrt{5}/2 > 1$ e il metodo di Jacobi non è convergente.

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Poiché G è triangolare superiore i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1/2$. Quindi $\rho(G) = 1/2 < 1$ e il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

Esercizio 3. È $s(1) = 1$, $s(2) = 3$, $s(3) = 6$. Il polinomio di interpolazione costruito con questi dati è $n^2/2 + n/2$ e coincide con $s(n)$ in quanto anche $s(n)$ è di grado 2.

Risulta poi che $s(4) = 10$, $s(5) = 15$, quindi $s^2(1) = 1$, $s^2(2) = 9$, $s^2(3) = 36$, $s^2(4) = 100$, $s^2(5) = 225$ e che questi sono anche i valori assunti da $t(n)$ negli stessi punti. Perciò $s^2(n)$ e $t(n)$ coincidono in 5 punti distinti ed essendo entrambi polinomi di 4^o grado, coincidono per ogni n.