CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

1/7/2005

Esercizio 1. a) Per il condizionamento di $f(x)$ si studia l'errore inerente

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = -1 + \frac{x \sin x}{2 - \cos x}.$$

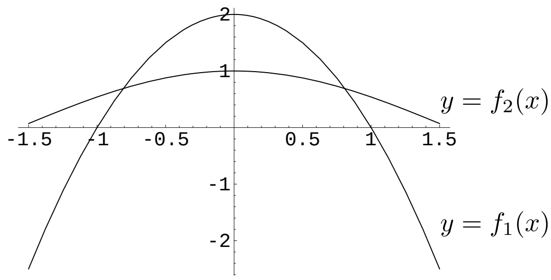
Poiché $2 - \cos x \geq 1$ per ogni x, risulta $|cx| < 1 + |x|$ per ogni x. Pertanto il calcolo di $f(x)$ risulta ben condizionato quando x è limitato.

b) Per la stabilità si studia l'errore algoritmico. Si ha

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)} - \frac{\cos x}{2 - \cos x}\, \epsilon^{(1)},$$

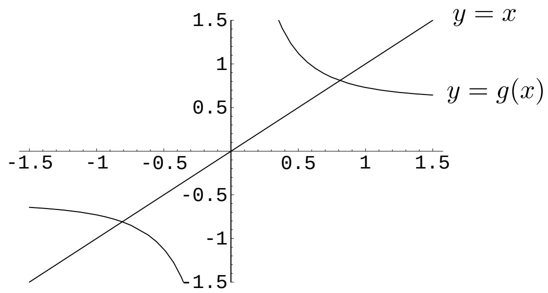
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono rispettivamente gli errori locali del calcolo di $\cos x$, della sottrazione e della divisione. Poiché $|\epsilon_{alg}| < 3u$ l'algoritmo risulta stabile.

Esercizio 2. a) Posto $f_1(x) = 2 - 3x^2$ e $f_2(x) = \cos x$, dal grafico



risulta che l'equazione ha le due soluzioni reali simmetriche $-\alpha$ e α, con $1/\sqrt{2} < \alpha < 1$.

b) Dal grafico



risulta che $g'(x) < 0$. Inoltre è

$$g'(x) = \frac{-2 + \cos x + x \sin x}{2x^2}.$$

In α si ha

$$g'(\alpha) = \frac{-2 + \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{2\alpha^2} = -1 + \frac{\sin \alpha}{2\alpha} > -1.$$

Quindi $-1 < g'(\alpha) < 0$ ed esiste un intorno circolare di α in tutti i punti del quale è $-1 < g'(x) < 0$. Ne segue che il metodo iterativo è convergente ad α purché si scelga x_0 in tale intorno e che l'ordine di convergenza è uguale a 1. Poiché $g'(1/\sqrt{2}) \sim -0.78$, si ha convergenza alternata scegliendo $x_0 = 1/\sqrt{2}$. Le stesse considerazioni valgono per la soluzione $-\alpha$.

Esercizio 3. A ha autovalori $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$ e autovettori

$$\boldsymbol{x}_1 = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{per} \quad k \in \mathbb{C}, \quad k \neq 0.$$

b) Poiché $\rho(A) = 3$ il metodo iterativo non è convergente.
c) Si ha

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = A\boldsymbol{x}^{(0)}/\|A\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \begin{bmatrix} 2(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \\ -(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \end{bmatrix} /|2(x_1^{(0)} - x_2^{(0)})| = \text{segno}(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

e $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(3)} = \ldots$ Perciò la successione converge e il suo limite è uguale a $\boldsymbol{x}^{(1)}$ che è autovettore di A relativo all'autovalore λ_1.
d) Il fatto che in c) si sia ottenuta una successione convergente è dovuto alla normalizzazzione del vettore calcolato ad ogni iterazione, che impedisce che le componenti del vettore crescano senza limitazioni.

Esercizio 4. a) $f(x)$ assume i valori $f(x_0) = 5$, $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 5$, $f(x_3) = f(2) = 0$. Si può ricavare $f(x)$ con il polinomio di Lagrange, o più rapidamente, notando che

$$r(x) = f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

dove $c = f'''(\xi)$ è una costante uguale al primo coefficiente di $f(x)$. Quindi

$$f(x) = p(x) + x(x^2 - 1)\frac{c}{3!} = 2x^2 + 3 + x(x^2 - 1)\frac{c}{6},$$

e $f(2) = 11 + c$. Dovendo essere $f(2) = 0$ risulta $c = -11$ e

$$f(x) = \frac{1}{6}\,(-11x^3 + 12x^2 + 11x + 18).$$

b) Poiché $r(x) = 11x(1 - x^2)/6$, si ha $r'(x) = 11(1 - 3x^2)/6$ e $r(\pm 1/\sqrt{3}) = 11/(9\sqrt{3}) \sim 0.70$ Pertanto

$$\max_{[-1,2]} |r(x)| = \max\,\{11/(9\sqrt{3}), |r(2)|\} = |r(2)| = 11.$$