CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

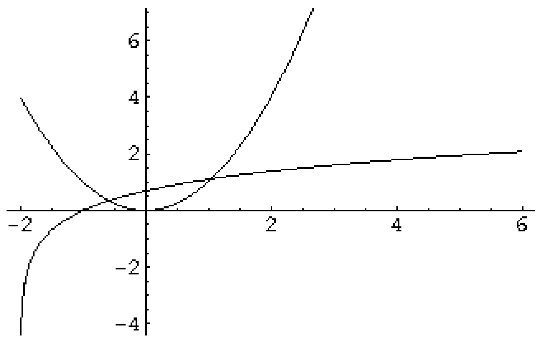
13/1/2005

Esercizio 1. In $\mathcal{F}_{(2,3,3,3)}$ con troncamento risulta

$$\widetilde{x} = 0.000111_2 = \frac{7}{64}, \quad \widetilde{y} = 0.00110_2 = \frac{3}{16}, \quad \widetilde{y}/\widetilde{x} = \frac{12}{7}, \quad \widetilde{y} \oslash \widetilde{x} = 1.10_2 = \frac{3}{2},$$

$$\widetilde{x} \cdot (\widetilde{y} \oslash \widetilde{x}) = \frac{21}{128}, \quad \widetilde{x} \otimes (\widetilde{y} \oslash \widetilde{x}) = 0.00101_2 \neq \widetilde{y}.$$

Esercizio 2. a) Dal grafico delle due funzioni $y = x^2$ e $y = \log(x+2)$



risulta che l'equazione ha due radici reali $\alpha \in [-2, 0]$ e $\beta =\in [0, 2]$.
b) L'equazione $x = g(x)$ ha la sola soluzione β e quindi non è equivalente alla $f(x) = 0$. Il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, se risulta convergente, può convergere solo a β.
c) È

$$g'(x) = \frac{1}{2(x+2)\sqrt{\log(x+2)}},$$

e per $x > 0$ è

$$2(x+2)\sqrt{\log(x+2)} > 4\sqrt{\log 2} > 2.$$

Quindi $0 < g'(x) < 1/2$. Ne segue che il metodo iterativo converge a β in modo monotono comunque si scelga $x_0 > 0$, con ordine di convergenza 1.

Esercizio 3. a) A è simmetrica, quindi i suoi autovalori sono reali. Con i cerchi di Gerschgorin si trova che gli autovalori appartengono all'intervallo $[0, 2]$.
b) Il polinomio caratteristico della matrice B è

$$p_B(\lambda) = \frac{1}{8}\lambda(-8\lambda^2 + 6\lambda + 3),$$

quindi gli autovalori di B sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{8}, \quad \lambda_3 = \frac{3-\sqrt{33}}{8}.$$

c) Poiché $A = B + 3/4I$, gli autovalori di A sono

$$\mu_1 = \frac{3}{4}, \quad \mu_2 = \frac{3}{4} + \lambda_2 = \frac{9+\sqrt{33}}{8} \sim 1.84, \quad \mu_3 = \frac{3}{4} + \lambda_3 = \frac{9-\sqrt{33}}{8} \sim 0.41$$

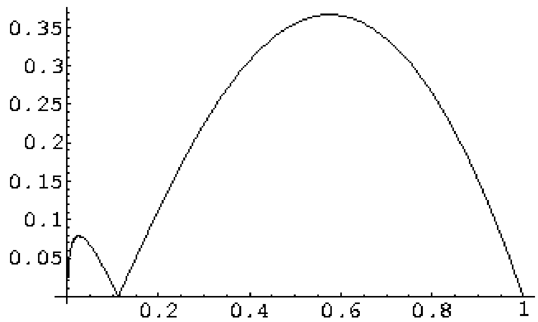
Gli autovalori di A^{-1} sono

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{\mu_2} = \frac{9-\sqrt{33}}{6} \sim 0.54, \quad \frac{1}{\mu_3} = \frac{9+\sqrt{33}}{6} \sim 2.46$$

Esercizio 4. a) Si ha

$$p(x) = \frac{1}{k+1}\big(-k^2x^2 + (k^2+k+1)x\big).$$

b) Per $k = 3$ è $p(x) = (-9x^2 + 13x)/4$ e il grafico di $|r(x)|$ per $x \in (0, 1]$ è



c*) È

$$\Big|r\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| = p\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k^2+2k+2}{4(k+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty} \Big|r\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| = \infty,$$

e ne segue che $|r(x)|$ non è superiormente limitato per $x \in [0, 1]$ al crescere di k. Questo non è in contrasto con quanto affermato dal teorema del resto, perché nel caso in esame la funzione f non è derivabile in 0 e quindi il teorema non è applicabile.