Soluzione della seconda prova intermedia
di Calcolo Numerico - Compito A
20 Dicembre 2005

Esercizio 1

1. Poiché

$$A^{-1} = \frac{1}{k^2-4}\begin{bmatrix} -2 & k \\ -k & 2 \end{bmatrix}$$

il numero di condizionamento in norma ∞ di A è

$$\mu_\infty(A) = \frac{(|k|+2)^2}{|k^2-4|} = \frac{(|k|+2)^2}{\big|\,(|k|-2)\,(|k|+2)\,\big|} = \frac{|k|+2}{\big|\,|k|-2\big|}.$$

Al variare di k, $\mu_\infty(A)$ non è limitato negli intorni dei punti 2 e -2.

2. Si ha

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4+k^2 & -4k \\ -4k & 4+k^2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-T}A^{-1} = \frac{1}{(k^2-4)^2}\begin{bmatrix} 4+k^2 & -4k \\ -4k & 4+k^2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A^TA sono $\lambda_1 = (k-2)^2$ e $\lambda_2 = (k+2)^2$, per cui $\rho(A^TA) = (k-2)^2$ se $k<0$ e $\rho(A^TA) = (k+2)^2$ se $k \ge 0$. Gli autovalori di $A^{-T}A^{-1}$ sono $\lambda_1 = 1/(k-2)^2$ e $\lambda_2 = 1/(k+2)^2$, per cui $\rho(A^{-T}A^{-1}) = 1/(k+2)^2$ se $k<0$ e $\rho(A^{-T}A^{-1}) = 1/(k-2)^2$ se $k \ge 0$. Perciò

$$\mu_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)\,\rho(A^{-T}A^{-1})} = \begin{cases} \dfrac{|k-2|}{|k+2|} & \text{se } k<0, \\[2ex] \dfrac{|k+2|}{|k-2|} & \text{se } k \ge 0, \end{cases}$$

Quindi

$$\mu_2(A) = \frac{|k|+2}{\big|\,|k|-2\big|} = \mu_\infty(A).$$

Esercizio 2

1. Si ha

$$J = D^{-1}(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi gli autovalori di J sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2/3$. Il metodo di Jacobi converge.

2. Si ha

$$G = (D - B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 4/9 \end{bmatrix},$$

quindi gli autovalori di G sono $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4/9$. Il metodo di Gauss-Seidel converge.

3. Si ha

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e $\det P = -3$. Poiché il prodotto degli autovalori di P, che è uguale al determinante, ha modulo maggiore di 1, almeno uno degli autovalori di P ha modulo maggiore di 1, per cui il metodo iterativo non risulta convergente.

Esercizio 3

È

$$p(x) = x(2 - x) \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{\pi x}{2}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{24}\right).$$

Quindi

$$r(x) = x(2 - x) - \sin\frac{\pi x}{2} \quad \text{e} \quad s(x) = \frac{\pi x}{2}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{24}\right) - \sin\frac{\pi x}{2}.$$

Nell'intervallo $[0, 1]$, $r(x)$ è sempre non negativa e si annulla in 0 e in 1. Poiché $f'''(x) = \dfrac{\pi^3}{8}\cos\dfrac{\pi x}{2}$, si ha

$$\max_{x\in[0,1]} |r(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} \frac{\pi^3 x(x-1)(x-2)}{8\ 3!} = \frac{\pi^3}{48} \max_{x\in[0,1]} x(x-1)(x-2).$$

La funzione $g(x) = x(x - 1)(x - 2)$ ha $1 - \sqrt{3}/3$ come punto di massimo in $(0, 1)$, e in tale punto vale $2/(3\sqrt{3}) \sim 0.385$. Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} |r(x)| \leq \frac{0.385\pi^3}{48} \sim 0.249.$$

Anche la funzione $s(x)$ è sempre non negativa nell'intervallo $[0, 1]$ e si annulla solo in 0. Può essere maggiorata dal successivo termine della serie $\pi^5 x^5/3840$. Il massimo di $s(x)$ in $[0, 1]$ è assunto in $x = 1$ e risulta maggiorato da $\pi^5/3840 \sim 0.08$. Tenuto conto dell'andamento dei resti, il polinomio $p(x)$ è preferibile quando x è vicino ad 1, mentre altrove è preferibile $q(x)$. Dal punto di vista computazionale $p(x)$ è preferibile a $q(x)$.