CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

21/7/2005

Esercizio 1. a) Per il condizionamento di $\log x$ si studia l'errore inerente

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\log x}.$$

Pertanto il calcolo di $\log x$ risulta malcondizionato nell'intorno di 1.
b) Per la stabilità si studia l'errore algoritmico del calcolo di $f(x)$. Si ha

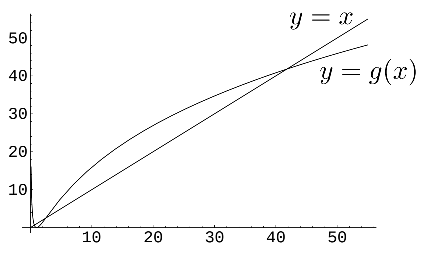
$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(4)} + \frac{x-1}{2x-1}(\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}),$$

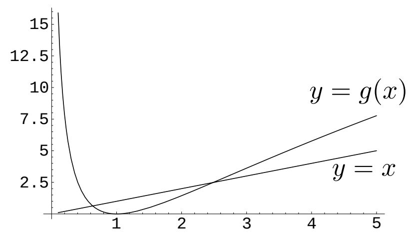
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono rispettivamente gli errori locali del calcolo della sottrazione in $x-1$, della divisione di $x-1$ per x, dell'addizione di 1 a $(x-1)/x$ e della moltiplicazione finale. Pertanto

$$\left|\epsilon_{alg}\right| < u\left(4 + 2\,\frac{|x-1|}{|2x-1|}\right).$$

Quindi l'algoritmo non è stabile nell'intorno destro di 1/2.

Esercizio 2. a) Dai grafici (il secondo è un ingrandimento del primo)





risulta che l'equazione ha le tre soluzioni reali $\alpha \in (0.5, 1)$, $\beta \in (2, 3)$ e $\gamma \in (40, 50)$.

b) Si ha $g'(x) = \dfrac{6}{x}\,\log^2 x$. Poiché α è tale che $g(\alpha) = \alpha$, si ha $\log \alpha = -\sqrt{\alpha/3}$ e $g'(\alpha) = -\sqrt{3/\alpha}$. Essendo $\alpha < 1$, risulta $|g'(\alpha)| > 1$. Il metodo non è localmente convergente in α. Con ragionamenti analoghi si verifica che il metodo non è localmente convergente neppure in β, mentre lo è in γ, con ordine di convergenza 1.

c) Il metodo converge a γ comunque si scelga $x_0 > \beta$. Se si sceglie $x_0 \in (1, \beta)$, dopo un numero finito di iterazioni monotone (eventualmente una sola) si ottiene un $x_i \in (0, 1)$. A quel punto la successione diventa alternata e dopo altre iterazioni è possibile che si ottenga un $x_i > \beta$. Alla fine la convergenza sarà sicuramente a γ.

Esercizio 3. a) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/k \\ -1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k & 0 \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica e il raggio spettrale sono

$$p_J(\lambda) = \lambda^4 + \frac{2}{k^4} = 0, \qquad \rho(J) = \frac{\sqrt[4]{2}}{|k|}.$$

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/k \\ 0 & 0 & 0 & 1/k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/k^3 \\ 0 & 0 & 0 & -2/k^4 \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica e il raggio spettrale sono

$$p_G(\lambda) = \lambda^3(\lambda + \frac{2}{k^4}) = 0, \qquad \rho(G) = \frac{2}{|k|^4}.$$

Entrambi i metodi convergono se e solo se $|k| > \sqrt[4]{2}$.

b) Non esistono valori di k per cui un metodo è convergente e l'altro no.

c) Poiché $\rho(G) < \rho(J)$ per ogni k per cui si ha convergenza, il metodo di Gauss-Seidel è preferibile.

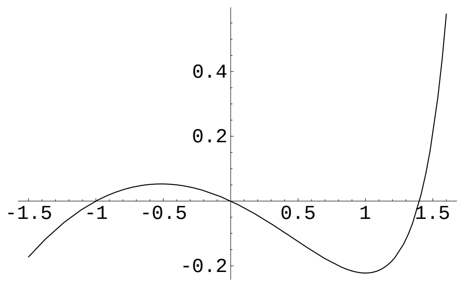
Esercizio 4. a) Indicato con $p(x) = ax^2 + bx + c$ il polinomio da determinare, si ha

$$\begin{cases} a - b + c = f(x_0) \\ c = f(x_1) \\ 2a + b = f'(x_2) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$a = \frac{f(x_0) - f(x_1) + f'(x_2)}{3}, \qquad b = \frac{-2f(x_0) + 2f(x_1) + f'(x_2)}{3}.$$

b) Per $f(x) = 1/(2-x)$ si ha $p(x) = \dfrac{5x^2}{18} + \dfrac{4x}{9} + \dfrac{1}{2}$. Il grafico di $r(x) = f(x) - p(x)$ risulta



Nell'intervallo $[-1, 1]$ si ha $\max |r(x)| = -r(1) = 2/9$.