Soluzione della prima prova intermedia
di Calcolo Numerico - Compito A
3 Novembre 2005

Esercizio 1

a) È

$$\varepsilon_{\text{in}} = C_f(x), \quad \text{dove} \quad C_f(x) = \frac{k\,x\ \cos(kx)}{\sin(kx)}.$$

In un intorno destro di 0 il calcolo di f risulta ben condizionato per ogni k. Per $k \geq 2$ il calcolo di f risulta mal condizionato negli intorni dei punti x tali che $kx = \pi,\ 2\pi, \ldots$, cioè $x = n\pi/k$, con n intero positivo tale che $n/k < \pi/2$. Per esempio per $k = 5$ tali punti sono $\pi/5$ e $2\pi/5$.

b) Per il primo algoritmo si trova

$$\varepsilon_{\text{alg},1} \doteq \varepsilon_2 + \frac{3x\cos(3x)}{\sin(3x)}\,\varepsilon_1,$$

dove ε_1 e ε_2 sono rispettivamente gli errori locali del calcolo di $3x$ e di $\sin(3x)$. Quindi

$$|\varepsilon_{\text{alg},1}| < \left(1 + \frac{3x|\cos(3x)|}{|\sin(3x)|}\right) u,$$

dove u indica la precisione di macchina.

Per il secondo algoritmo si trova

$$\varepsilon_{\text{alg},2} \doteq \eta_5 + \eta_1 + \frac{3}{3 - 4\sin^2 x}\,\eta_4 - \frac{4\sin^2 x}{3 - 4\sin^2 x}\,\left(2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\right),$$

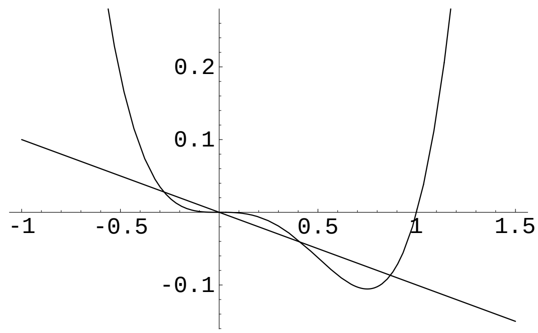
dove η_1, η_2, η_3, η_4 ed η_5 sono rispettivamente gli errori locali del calcolo di $\sin x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $3\sin x$ e della differenza $3\sin x - 4\sin^3 x$, assumendo, come si fa usualmente, che la moltiplicazione per 4 non produca errore. Quindi

$$|\varepsilon_{\text{alg},2}| < \left(2 + \frac{3 + 16\sin^2 x}{|3 - 4\sin^2 x|}\right) u.$$

Entrambi gli algoritmi risultano instabili per x in un intorno di $\pi/3$. Per x in un intorno destro dello zero si ha $|\varepsilon_{\text{alg},1}| < 2u$ e $|\varepsilon_{\text{alg},2}| < 3u$, mentre per x in un intorno sinistro di $\pi/2$ si ha $|\varepsilon_{\text{alg},1}| < u$ e $|\varepsilon_{\text{alg},2}| < 21u$. I due algoritmi appaiono quindi godere delle stesse caratteristiche di stabilità, anche se il primo sembra essere preferibile, anche perché ha un costo computazionale inferiore.

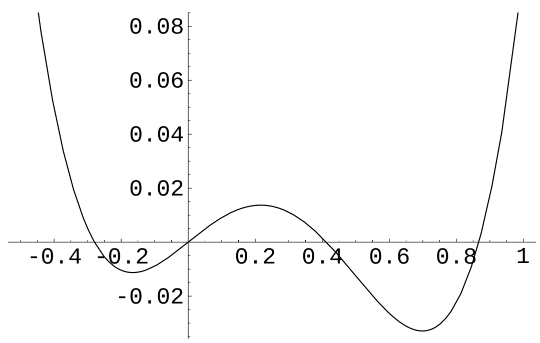
Esercizio 2

a) Dal grafico delle funzioni $y = x^3(x-1)$ e $y = -0.1\,x$



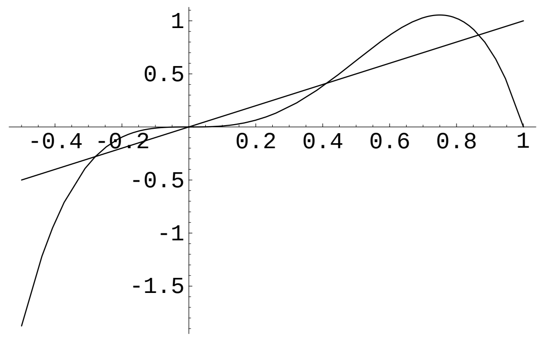
risulta che l'equazione $f(x) = 0$ ha quattro soluzioni reali, di cui la prima in $[-1, -0.2]$, la seconda $\beta = 0$, la terza $\alpha \in [0.2, 0.5]$ e la quarta in $[0.8, 1]$.

b) È $f''(x) = 6x(2x-1)$. Quindi vi sono due punto di flesso: lo 0 e il punto 1/2. Dal grafico della funzione $f(x)$



risulta che il metodo delle tangenti consente di approssimare la prima soluzione scegliendo x_0 minore dell'ascissa del primo punto di minimo e la quarta soluzione scegliendo x_0 maggiore dell'ascissa del secondo pundo di minimo. Per la soluzione α la convergenza monotona del metodo è garantita scegliendo $x_0 \in (\alpha, 1/2]$. Per studiare la convergenza alla soluzione β non si può utilizzare il teorema di convergenza in grande, ma solo dire che esiste un intorno di β di convergenza. L'ordine del metodo è tre per la soluzione β e due per le altre tre soluzioni.

c) Dal grafico delle funzioni $y = x$ e $y = -x^3(x-1)/0.1$



risulta che la funzione di iterazione ha derivata maggiore di 1 in α. Quindi α non è punto di convergenza locale. Esistono però punti maggiori di α a partire dai quali il metodo iterativo proposto genera successioni convergenti ad α.

Esercizio 3

È facile verificare che $\det A = 0$ e che il rango di A è 2. Infatti le prime due righe sono linearmente indipendenti, mentre la terza riga cambiata di segno è uguale alla somma delle prime due. L'equazione caratteristica risulta

$$p(A) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda - 2) = 0.$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità 2 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità 1. Vi sono due soli autovettori linearmente indipendenti, ad esempio

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi A non è diagonalizzabile.