Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica

PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

18/01/2006

Esercizio 1 Studiare il condizionamento e la stabilità del calcolo della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x} \qquad \text{per } x \text{ nell'intorno dello 0.}$$

Esercizio 2 È data la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

a) Determinare una funzione $g(x)$ tale che $g^2(x) = f(x)$. Le due equazioni $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ sono equivalenti?

b) Studiare la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni di $f(x) = 0$ (scelta del punto iniziale x_0, monotonia della successione, ordine di convergenza).

c) Studiare la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni di $g(x) = 0$.

Esercizio 3 Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori di $\boldsymbol{R}^n$, con $n \geq 2$. Oltre alle operazioni di prodotto interno ed esterno di vettori, si potrebbe pensare di definire anche un'operazione di "prodotto componente per componente" nel modo seguente:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}, \quad \text{di componenti } z_i = u_i\, v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

a) Verificare che non valgono le relazioni $|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty, \quad \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\|_\infty \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty$.

b) Verificare che vale la relazione $\|\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty$.

Esercizio 4 Sono date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Dire se A ha predominanza diagonale per righe.

b) Dire se la matrice $T = SAS^{-1}$ ha predominanza diagonale per righe.

c) Dire se il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice T è convergente.

d) Indicate con J_A e J_T le matrici di iterazione di Jacobi relative alle matrici A e T, dimostrare che

$$J_T = SJ_AS^{-1}.$$

e) Dire se il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice A è convergente.