Università di Pisa

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Seconda prova intermedia di Calcolo Numerico

19/12/2006

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino gli autovalori di A.
(b) Si verifichi che la somma degli autovalori è uguale alla traccia di A e il prodotto degli autovalori è uguale al determinante di A.
(c) Si dica, giustificando la risposta, se A è diagonalizzabile.
(d) Si disegnino sul piano complesso gli autovalori di A e l'insieme al quale devono appartenere secondo il teorema di Gerschgorin.
(e) Indicando con R_i e C_i, per $i = 1, 2$ i cerchi di per riga e per colonna di A, si accerti, con un opportuno disegno, se gli autovalori appartengono o meno all'insieme $(R_1 \cap C_1) \cup (R_2 \cap C_2)$.

Esercizio 2 È assegnata la matrice quadrata di ordine $2n$

$$A = \begin{pmatrix} I & F \\ G & I \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identica di ordine n e F, G sono generiche matrici di ordine n.
(a) Si studi la convergenza del metodo di Jacobi nel caso in cui $||F||_1 < 1$ e $||G||_1 < 1$.
(b) Si supponga di voler risolvere un sistema lineare $Ax = b$. Quante moltiplicazioni/divisioni sono necessarie per eseguire in passo del metodo di Jacobi?
(c) Quante moltiplicazioni/divisioni sono necessarie per ridurre A in forma triangolare con il metodo di eliminazione di Gauss supponendo che non sia necessario effettuare scambi di righe.
(d) Eseguire la riduzione, senza effettuare scambi di righe, nel caso particolare $n = 2$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $F = -G$.
(e) Si congettura che $\det(A) = \det(I)\det(I) - \det(F)\det(G)$. È vero che il caso particolare al punto (d) smentisce questa congettura? Motivare la risposta.

Esercizio 3
(a) Calcolare il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei tre punti $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(3, 0)$.
(b) Si determini il parametro α in modo che il polinomio

$$q(x) = p(x) + \alpha(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

passi per $(4, 2)$.
(c) Si dica, motivando la risposta, se $q(x)$ è il polinomio di interpolazione dei 4 punti $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ e $(4, 2)$.
(d) Si assuma che il polinomio $q(x)$ interpoli sui nodi 1, 2, 3, 4 una funzione $f(x)$ per cui è noto che $\max_{[1,4]} |f^{(n)}(x)| \leq 2n$. Posto $r(x) = f(x) - q(x)$ ottenere una maggiorazione per

$$\max_{[1,4]} |r(x)|.$$