

**Università di Pisa**  
**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**  
Seconda prova intermedia di Calcolo Numerico

19/12/2006

**Esercizio 1** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si calcolino gli autovalori di  $A$ .
- (b) Si verifichi che la somma degli autovalori è uguale alla traccia di  $A$  e il prodotto degli autovalori è uguale al determinante di  $A$ .
- (c) Si dica, giustificando la risposta, se  $A$  è diagonalizzabile.
- (d) Si disegnino sul piano complesso gli autovalori di  $A$  e l'insieme al quale devono appartenere secondo il teorema di Gerschgorin.
- (e) Indicando con  $R_i$  e  $C_i$ , per  $i = 1, 2$  i cerchi di per riga e per colonna di  $A$ , si accerti, con un opportuno disegno, se gli autovalori appartengono o meno all'insieme  $(R_1 \cap C_1) \cup (R_2 \cap C_2)$ .

**Esercizio 2** È assegnata la matrice quadrata di ordine  $2n$

$$A = \begin{pmatrix} I & F \\ G & I \end{pmatrix}$$

dove  $I$  è la matrice identica di ordine  $n$  e  $F, G$  sono generiche matrici di ordine  $n$ .

- (a) Si studi la convergenza del metodo di Jacobi nel caso in cui  $\|F\|_1 < 1$  e  $\|G\|_1 < 1$ .
- (b) Si supponga di voler risolvere un sistema lineare  $Ax = b$ . Quante moltiplicazioni/divisioni sono necessarie per eseguire in passo del metodo di Jacobi?
- (c) Quante moltiplicazioni/divisioni sono necessarie per ridurre  $A$  in forma triangolare con il metodo di eliminazione di Gauss supponendo che non sia necessario effettuare scambi di righe.
- (d) Eseguire la riduzione, senza effettuare scambi di righe, nel caso particolare  $n = 2$ ,  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $F = -G$ .
- (e) Si congetture che  $\det(A) = \det(I) \det(I) - \det(F) \det(G)$ . È vero che il caso particolare al punto (d) smentisce questa congettura? Motivare la risposta.

**Esercizio 3**

- (a) Calcolare il polinomio  $p(x)$  di interpolazione dei tre punti  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  e  $(3, 0)$ .
- (b) Si determini il parametro  $\alpha$  in modo che il polinomio

$$q(x) = p(x) + \alpha(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

passi per  $(4, 2)$ .

- (c) Si dica, motivando la risposta, se  $q(x)$  è il polinomio di interpolazione dei 4 punti  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$  e  $(4, 2)$ .
- (d) Si assuma che il polinomio  $q(x)$  interpoli sui nodi 1, 2, 3, 4 una funzione  $f(x)$  per cui è noto che  $\max_{[1,4]} |f^{(n)}(x)| \leq 2n$ . Posto  $r(x) = f(x) - q(x)$  ottenere una maggiorazione per

$$\max_{[1,4]} |r(x)|.$$